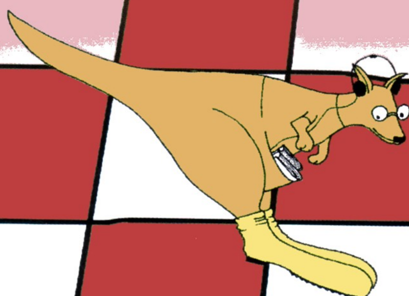
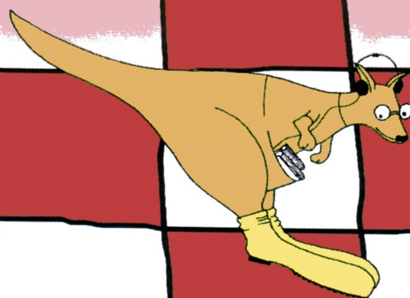
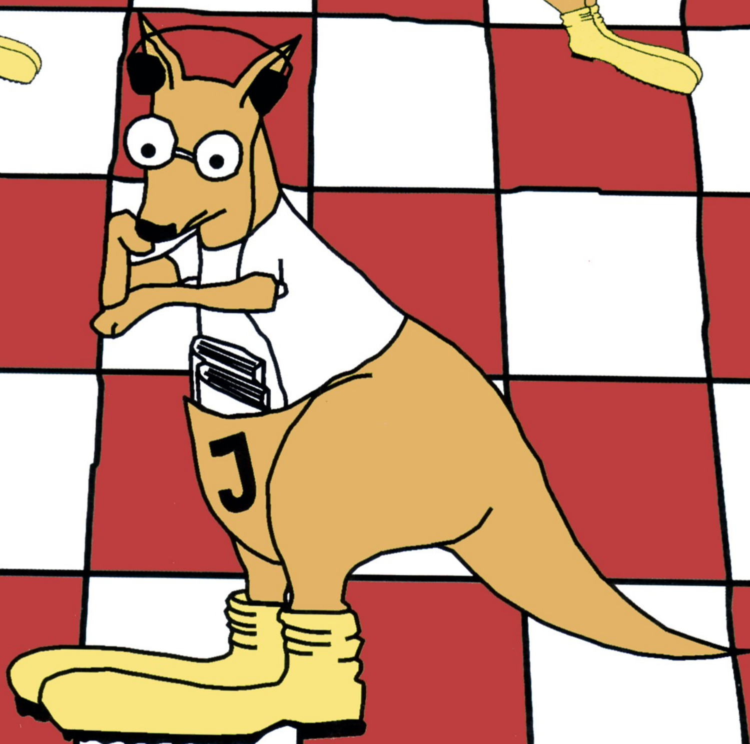
KENGŪRA
1991–1998

Junioras

KENGŪRA 1991–1998. JUNIORAS

TARPTAUTINIO MATEMATIKOS KONKURSO
UŽDUOTYS IR SPRENDIMAI



TEV
VILNIUS 2009

UDK 51(079)
Ke-108

Leidyklos TEV interneto svetainė http://www.tev.lt

Redaktoriai *Žydrūnė Stundžienė, Valdas Vanagas*
Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*
Kompiuterinė grafika: *Marek Butrimas ir Edita Tatarinavičiūtė*
Tekstą rinko ir maketavo *Laimutė Arišauskienė*

MATEMATYKA Z WESOŁYM KANGUREM. Kadet. Junior
Original Polish edition

Iš lenkų kalbos vertė *Juozas Mačys*

ISBN 978-9955-879-44-2

Turinys

Pratarmė

2008 metų balandžio 2 dieną Lietuvos mokiniai dešimtą kartą dalyvavo tarptautiniame matematikos konkurse *Kengūra*, kurį kasmet organizuoja tarptautinė asociacija „Kangourou sans frontières“ (*Kengūra be sienų*).

Tai vienos iš įdomiausių mokiniams organizuojamų matematikos varžybų. Konkursas kasmet vis labiau populiarėja — 2008 metais jame dalyvavo per 5 milijonus mokinių iš 45 Europos, Amerikos ir Azijos šalių. Lietuvoje dalyvių skaičius 2008 metais buvo rekordinis — 70 000 mokinių. Kaip visada, nugalėtojai (šį kartą apie 1200!) bus apdovanoti prizais, dalyvaus tarptautinėse stovyklose Lietuvoje, Lenkijoje, Ukrainoje ir Baltarusijoje, varžysis jose organizuojamuose turnyruose.

Kiekvienais metais po konkurso išleidžiamos knygelės „Kengūra. Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai“, kuriose nagrinėjami praėjusio turnyro uždaviniai, pateikiami įvairiausi jų sprendimai — galvosūkiniai, pirmokiški, matematiški. Knygelėse visų 6 grupių (I–XII klasių) uždavinių sąlygos skelbiamos net keturiomis kalbomis — lietuviškai, angliškai, rusiškai, lenkiškai.

Į Lietuvą *Kengūra* atžygiavo per Lenkiją — šalį, kurioje konkursas vyksta jau penkiolika metų. Įsitikinus konkurso patrauklumu, 1999 metais buvo suorganizuotas pirmasis masinis lietuviškas konkursas. Konkurso užduotys labai įvairios, jose matematika persipina su galvosūkiais, rimtas užduotis keičia pokštai, todėl jų dabar apstu ir vadovėlių puslapiuose, ir visose mokyklų varžybose. Neabejotina jų nauda net rengiantis matematikos egzaminams — *Kengūros* uždaviniai pratina prie netikėtumų, neįprastų situacijų, nelauktų klausimų.

Glaudžiai bendradarbiaujant su Lenkijos *Kengūros* konkurso organizatoriais — Torunės M. Koperniko universiteto matematikais ir leidykla „Aksjomat“ — buvo susitarta išversti ir išleisti lietuvių kalba ankstesniųjų metų konkursų užduočių knygutes kiekvienai grupei. Jau išleistos „Mažylio“, „Bičiulio“, „Kadeto“ knygelės.

Ši knygelė skirta IX–X klasių mokinių grupei „Junioras“, nors tokius uždavinius *Kengūros* konkursuose sprendė tiek jaunesni, tiek vyresni mokiniai. Tad jie gali būti įdomūs tiek visiems mokiniams, tiek mokytojams, tiek tėveliams. Tikimės, kad knygelė taip pat padės rengiantis būsimiems *Kengūros* konkursams. Dalyvauti juose gali kiekvienas mokinys — net jei jis niekad nesidomėjo matematika, tik užsiregistruoti mokykloje reikia iš anksto.

Išbandykite save. Linkime sėkmės!

Leidėjai

Sąlygos



Klausimai po 3 taškus

1. $(0{,}03)^2$ lygu:

A 0,009 **B** 0,0009 **C** 0,006 **D** 0,0006 **E** 0,03

2. ABC — lygiašonis trikampis. Kampas A lygus 18°. Kampas B gali būti lygus:

A 163° **B** 81° **C** 83° **D** 56° **E** 73°

3. Ponas Jonas planuoja iškilmingai atšvęsti savo gimimo 30 000 dienų jubiliejų. Kiek metų jam sukaks po to jubiliejaus artimiausią gimtadienį?

A 83 metai **B** 100 metų **C** 27 metai **D** 5 metai **E** 77 metai

4. Du trikampiai panašūs su homotetijos (panašumo) koeficientu $-\frac{1}{2}$. Tų trikampių plotų santykis gali būti lygus:

A $-\frac{1}{2}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** 1 **D** 4 **E** -4

5. Jeigu $y = \frac{3x-4}{x-4}$ ir $y = 2$, tai x lygus:
A 3 **B** 1 **C** -2 **D** -4 **E** -1

6. $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ lygu:

A 0 **B** $\frac{x-y}{x+y}$ **C** $\frac{y}{x}$ **D** $\frac{x+y}{x-y}$ **E** Kita reikšmė

7. Archimedas gyveno:

A 200 metų pr. Kr. **B** 52 metai pr. Kr. **C** 2000 m. pr. Kr.
D 250 m. pr. Kr. **E** 1220 m. pr. Kr.

8. Dviratininkas dažnai važiuoja iš Sento į Rojalį ir atgal. Į ten jis važiuoja 30 km/h greičiu, o atgal — 20 km/h greičiu. Koks dviratininko vidutinis greitis?

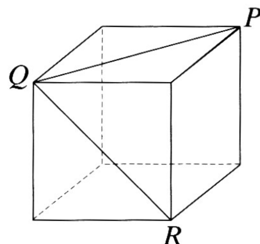
A 25 km/h **B** 26 km/h **C** 24 km/h **D** 22 km/h **E** 28 km/h

9. Plokštumoje laisvai pasirenkame lygiagretainį $ABCD$ ir tašką M. Kiek daugiausiai gali būti taškų lygiagretainio $ABCD$ kraštinėse, kurių kiekvieno atstumas iki taško M lygus 5 cm?

A 8 **B** 6 **C** 4 **D** 2 **E** 0

10. RQ ir QP yra kubo gretimų sienų įstrižainės (kaip paveikslėlyje). Kam lygus kampas PQR?

A 120° **B** 45° **C** 60° **D** 75° **E** 90°



Klausimai po 4 taškus

11. Parašiau knygą apie kengūrų gyvenimą. Knyga turi 972 puslapius, pats juos sunumeravau. Kiek kartų numeruodamas parašiau skaitmenį 7?

A 277 **B** 278 **C** 279 **D** 289 **E** 290

12. Laive yra 31 jūrininkas, kurių amžiaus vidurkis lygus 23 metams. Prie jūrininkų prijungus laivo kapitoną, amžiaus vidurkis padidėtų iki 24 metų. Kiek metų kapitonui?

A 25 **B** 55 **C** 32 **D** 31 **E** 45

13. Norėdamas sutaupyti elektros energijos, namo savininkas padarė tris patobulinimus, kurie vienas po kito name apšildymo išlaidas sumažino 20%, 25% ir 55%. Tai padaręs, jis sutaupė apšildymo išlaidas:

A 33,5% **B** 27,5% **C** 73% **D** 66,6% **E** 100%

14. Duota, kad $-2 \leqslant x < 1$. Todėl:

A $x^2 < 0$ **B** $1 < x^2 \leqslant 4$ **C** $x^2 < 4$ **D** $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$ **E** $0 < x^2 < 4$

15. Šiandien Pauliaus gimtadienis. Jam 21 metai. Kurią savaitės dieną Paulius gimė?

A Šeštadienį **B** Penktadienį **C** Antradienį **D** Penktadienį
E Kitą savaitės dieną

16. Viena akcija biržoje kainavo 1400 frankų. Nuo gegužės iki birželio akcijos vertė išaugo 10%, o nuo birželio iki liepos ji nukrito 10%. Kiek akcija kainavo liepą?

A 1450 frankų **B** 1400 frankų **C** 1390 frankų **D** 1386 frankus
E 1376 frankus

17. Kam lygus skritulio, apibrėžto apie kvadratą $ABCD$, ir skritulio, įbrėžto į tą kvadratą, plotų santykis?

A $\sqrt{2}$ **B** 4 **C** 2 **D** $\pi\sqrt{2}$ **E** Trūksta duomenų

18. Daugianario
$(x-1)(x-2)(x-3)\cdot\ldots\cdot(x-99)(x-100)$
koeficientas prie x^{99} lygus:

A -5050 **B** -4950 **C** -99 **D** -100 **E** -4851

19. Kam lygi suma $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\cdots+\frac{1}{1990\cdot1991}$?

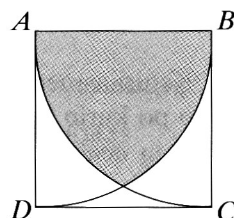
A 1991 **B** $\frac{1990}{1991}$ **C** $\frac{1991}{1990}$ **D** 1 **E** 0,833

20. Povilas sako Petrui: „Man dabar 3 kartus daugiau metų, negu tu turėjai tada, kai aš turėjau tiek metų, kiek tu turi dabar. Kai būsi mano metų, kartu mums bus 112 metų“. Kiek metų Petrui?

A 24 **B** 32 **C** 48 **D** 16 **E** Kitas atsakymas

Klausimai po 5 taškus

21. Kvadrato $ABCD$ kraštinės ilgis a. Į kvadratą įbrėžti du ketvirčiai apskritimų, kurių centrai atitinkamai yra taškuose A ir B, o spindulys — a. Bendros skritulių dalies plotas lygus:



A $(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4})a^2$ **B** $\frac{1}{6}a^2$ **C** $\frac{\pi}{6}a^2$ **D** $\frac{\sqrt{3}-1}{6}\pi a^2$
E Trūksta duomenų

22. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių negali būti kokio nors iškilojo daugiakampio įstrižainių skaičius?
A 9 **B** 16 **C** 20 **D** 54 **E** 5

23. Nagrinėkime funkciją

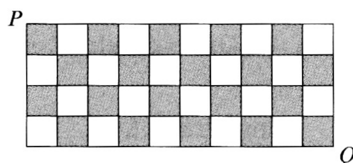
$$f(x)=\frac{1}{1-x},\ \text{jei } x\neq1,\ \text{ir tegu} f^{(2)}=f\circ f,\ f^{(n)}=f^{(n-1)}\circ f,$$

$$\text{t. y. } f^{(2)}(x)=f\circ f(x)=f(f(x)),\quad f^{(n)}(x)=\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n\ \text{kartų}}(x))\ldots)).$$

Skaičius $f^{(1991)}(1991)$ lygus:

A $\frac{-1}{1990}$ **B** $\frac{1990}{1991}$ **C** 0 **D** 1991 **E** 0,9

24. Skruzdėlė ropoja kvadratėlių kraštinėmis taip, kad užtušuotas kvadratėlis būtų jai iš kairės. Keliauja ji iš taško P į tašką Q trumpiausiu keliu. Kiek yra tokių kelių?



A 10 **B** 2 **C** 4 **D** 21 **E** 8

25. Skaičius 1991 yra palindrominis, t. y. vienodas skaitant iš kairės į dešinę ir atvirkščiai. Kiek yra triženklių palindrominių skaičių, kurie yra sveikojo skaičiaus kvadratai?

A Nėra tokių skaičių **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 5

26. Apskritime pažymėta n taškų. Naudodamiesi dviejų spalvų kreidelėmis, jungiame kiekvieną iš tų taškų su kiekvienu iš likusių. Koks yra mažiausias skaičius n, kad bent vieno trikampio visos kraštinės būtų vienos spalvos, nors ir kaip spalvintume jungtis tarp taškų?

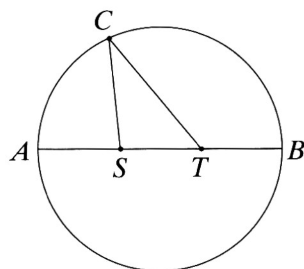
A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 12

27. Jeigu $a + b = 1$ ir $a^2 + b^2 = 2$, tai $a^4 + b^4$ lygu:

A 4 **B** 8 **C** 7 **D** 1 **E** 3,5

28. Stefanija (S) ir Tomas (T) stovi ant apskritos aikštės skersmens AB ir dalija tą skersmenį į tris lygias dalis. Česlovas stovi apskritimo taške C, ir atstumas CS lygus 7 m, o atstumas CT lygus 9 m. Kam lygus atstumas tarp Stefanijos ir Tomo?

A $\sqrt{15}$ **B** 6 **C** $\sqrt{26}$ **D** $\sqrt{32}$ **E** 5

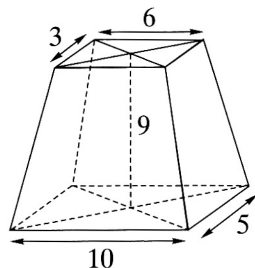


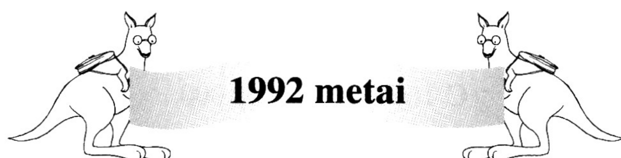
29. Keturi asmenys sėdi ant suolo. Tam tikru momentu jie visi pasikelia nuo suolo, o po kurio laiko vėl susėda. Keliais būdais jie gali susėsti taip, kad nė vienas iš jų neatsidurtų vietoje, kurioje jau sėdėjo prieš tai?

A 24 **B** 9 **C** 1 **D** 4 **E** 12

30. Smėlio krūva yra nupjautinė piramidė, kurios pagrindai stačiakampiai, jų centrus jungia piramidės aukštinė, o šoninės sienos yra lygiašonės trapecijos (žr. paveikslėlį). Koks yra smėlio krūvos tūris?

A 290 **B** 294 **C** 120 **D** 250 **E** 194





Klausimai po 3 taškus

1. Tūkstantis devyniasdešimt devyni plius vienas lygu:

A 1199 **B** 2000 **C** 1098 **D** 1100 **E** 10 000

2. Lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė c, plotas lygus S. Kam lygus plotas lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė lygi $c\sqrt{3}$?

A $S\sqrt{3}$ **B** $3S$ **C** $\frac{3S}{2}$ **D** $\frac{S\sqrt{3}}{2}$ **E** Kitas atsakymas

3. Dvejetas, pakeltas dešimtuoju laipsniu, lygus:

A 1024 **B** 100 **C** 512 **D** 64 **E** 2

4. Kuri iš žemiau nurodytų figūrų turi daugiau kaip vieną simetrijos centrą?

A Tiesė **B** Apskritimas **C** **D** Lygiagretainis **E** Kvadratas

5. Kiek daugiausia apskritimų gali liesti tris tas pačias tieses?

A 4 **B** 3 **C** 1 **D** 7 **E** 12

6. Didysis fizikas ir matematikas Niutonas gal būt galėjo susitikti su:

A Julijumi Cezariu **B** Karoliu Didžiuoju **C** Liudviku XIV
D Napoleonu **E** Džonu Kenedžiu

7. Jeigu $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$, tai kuri iš nelygybių teisinga?

A $1{,}4 < x < 1{,}7$ **B** $1{,}4 < x < 1{,}8$ **C** $1{,}5 < x < 1{,}7$
D $1{,}5 < x < 1{,}8$ **E** $2 < x < 3$

8. Kuri iš žemiau nurodytų lygybių yra neteisinga?

A $\sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ **B** $\sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ **C** $\sqrt{2+3} = \sqrt{5}$
D $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ **E** $\sqrt{2+3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

9. Du artojai turi suarti lauką. Vienas tai padarytų per 7 valandas, kitas — per 5 valandas. Kiek laiko tai truks, jei jie dirbs kartu?

A 6 val. **B** 6 val. 12 min. **C** 6 val. 30 min. **D** 2 val. 55 min.
E 3 val. 20 min.

10. Kiekviena iš penkių automobilio padangų vienodai atitarnavo važiuojant 20 000 kilometrų. Kiek kilometrų „prisuko“ kiekviena iš padangų?

A 4000 **B** 5000 **C** 16 000 **D** 20 000 **E** 100 000

Klausimai po 4 taškus

11. Jeigu x ir y yra realieji skaičiai, tai kuris iš žemiau nurodytų teiginių teisingas?

A $x \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \geqslant x$ **B** $x \geqslant 1 \Rightarrow x^2 \geqslant x$ **C** $x < y \Rightarrow x^2 < y^2$
D $x < y \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$ **E** $x > y \Rightarrow x^2 > xy$

12. Vieno licėjaus 14% mokinių mokosi rusų kalbos, 78% mokinių nesimoko nei rusų, nei prancūzų kalbos, 2% mokinių mokosi abiejų minėtų kalbų. Kiek procentų mokinių mokosi prancūzų kalbos?

A 22% **B** 10% **C** 8% **D** 86% **E** 6%

13. „Kelinta dabar valanda?“ — kažkas paklausė keistuolį. „Iš paros liko vos du trečdaliai to laiko, kuris jau praėjo“, atsakė šis. Kelintą tai buvo valandą?

A 14^{24} **B** 14^{30} **C** 14^{42} **D** 14^{00} **E** 14^{48}

14. Ant biliardo stalo 2 m × 6 m nuo ilgesniojo krašto vidurio taško 45° kampu to krašto atžvilgiu pradeda riedėti rutulys. Koks bus rutulio atstumas nuo pradinio taško, kai jis 59-tą kartą atsimuš į stalo kraštą?

A 2 **B** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ **C** 1 **D** $2\sqrt{3}$ **E** 3

15. Jeigu a, b, c, d — natūralieji skaičiai ir $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $N = \frac{a+c}{b+d}$, tai:

A $N < \frac{a}{b}$ **B** $N = \frac{a}{b}$ **C** $\frac{a}{b} < N$ **D** $N = \frac{c}{d}$ **E** $N > \frac{c}{d}$

16. Duota, kad $\sin x = \frac{5}{13}$ ir $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Kam lygus $\cos x$?

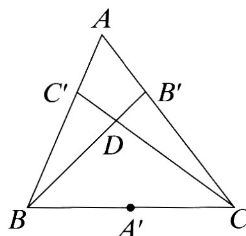
A $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **B** $\frac{12}{13}$ **C** $\frac{5}{12}$ **D** $\frac{1}{5}$ **E** 2

17. Kam lygi skaičiaus $N = 10^{92} - 92$ skaitmenų suma?

A 1492 **B** 992 **C** 818 **D** 809 **E** 798

18. Duota, kad $AB' = \frac{1}{3}AC$, $AC' = \frac{1}{3}AB$, o A' yra BC vidurio taškas. Ką galima pasakyti apie tašką D?

A $AD = DA'$ **B** $AD = \frac{4}{9}AA'$ **C** $AD = \frac{3}{7}AA'$
D $AD = \frac{1}{3}AA'$ **E** D neturi būti tiesėje AA'



19. Tiesių $3x + by + c = 0$ ir $cx - 2y + 12 = 0$ grafikai sutampa. Kiek yra porų (b, c), pasižyminčių tokia savybe?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** Daugiau kaip 2 **E** Be galo daug

20. Magiškieji 3×3 kvadratai $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ sudaromi iš realiųjų skaičių taip, kad kiekviena trijų skaičių, esančių vienoje eilutėje, viename stulpelyje ar vienoje įstrižainėje, suma lygi 15. Kuris iš žemiau išvardytų teiginių neteisingas?

A Jeigu pirmą kvadrato eilutę sudaro sveikieji skaičiai, tai visi kvadrato skaičiai sveikieji
B $a + g = f + 5$
C Tokį kvadratą galima sudaryti iš visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 9
D Bet kurio magiškojo kvadrato centriniame langelyje stovi 5
E Jeigu įstrižainė sudaryta iš sveikųjų skaičių, tai visi kvadrato skaičiai yra sveikieji

Klausimai po 5 taškus

21. Trys skaičiai a, b, c tenkina lygybes:

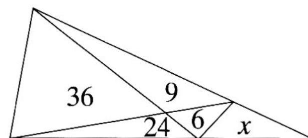
$$b - a = c - b, \qquad \frac{b}{a+1} = \frac{c}{b}, \quad \frac{b}{a} = \frac{c+2}{b}.$$

Kam lygus skaičius b?

A 12 **B** 8 **C** -6 **D** 3 **E** Kitas atsakymas

22. Paveikslėlyje nurodyti keturių trikampių plotai. Kam lygus penktojo trikampio plotas x?

A 3 **B** 4 **C** 15 **D** 6 **E** 7

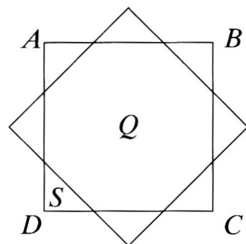


23. Ant penkių elektros laidų tupi kregždės, ant kiekvieno mažiausiai viena. Tik ant penkto (aukščiausio) ir trečio laido tupi tiek pat kregždžių. Jeigu nuo ketvirto laido ant trečio perskristų trys kregždės, tai ant tų dviejų laidų būtų po tiek pat kregždžių. Jeigu viena kregždė perskristų nuo trečio laido ant aukščiausio, tai ant jo tupėtų dukart daugiau kregždžių nei ant trečio. Jeigu keturios kregždės nuskristų nuo ketvirto laido, tai ant jo tupėtų tiek pat kregždžių, kiek kartu tupi ant pirmo ir antro laidų. Mažiausiai kregždžių tupi ant žemiausio (pirmo) laido. Kiek jų tupi ant antro laido?

A 6 **B** 4 **C** 5 **D** 3 **E** 2

24. Du kvadratai, kurių plotai lygūs S ir Q, padėti kaip paveikslėlyje. Kirtimosi taškai kvadrato $ABCD$ (jo plotas S) kiekvieną kraštinę dalija į tris lygias dalis. Kuris iš žemiau išvardytų teiginių teisingas?

A $S = Q$ **B** $2S = 3Q$ **C** $5S = 6Q$
D $8S = 9Q$ **E** $9S = 11Q$



25. Skaičiai a, b, c, d yra tokie, kad trečiojo laipsnio šaknis iš abc lygi 4, o ketvirtojo laipsnio šaknis iš $abcd$ lygi $2\sqrt{10}$. Skaičius d lygus:

A 25 **B** 100 **C** 64 **D** 3 **E** 5

26. Lygtis $\big||x-2|-1\big| = a$ turi lygiai tris šaknis. Skaičius a lygus:

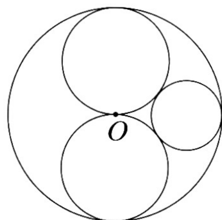
A 0 **B** 1 **C** $\frac{7}{3}$ **D** $\sqrt{3}$ **E** 3

27. Duota, kad $x > 0$ ir $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Kam lygu $x^5 + \frac{1}{x^5}$?

A 55 **B** 63 **C** 322 **D** 123 **E** Kitas atsakymas

28. Apskritimo C centras O, o spindulys 2. Jo viduje yra trys apskritimai, kurie liečia vienas kitą ir apskritimą C. Du iš tų apskritimų eina per tašką O. Kam lygus trečiojo apskritimo spindulys?

A $\frac{2}{3}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **D** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E** 0,8



29. Sveikasis skaičius vadinamas trikampiu, jeigu jis lygus natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n sumai (pavyzdžiui, $1 = 1$, $3 = 1+2$, $6 = 1+2+3$, $10 = 1+2+3+4$ yra trikampiai skaičiai). Kada natūraliojo skaičiaus kvadratas K yra trikampis skaičius?

A Tik kai $K = 1$
B Kai K yra lyginio skaičiaus kvadratas
C Kai K dalijasi iš 6
D Kai $8K + 1$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas
E Kai $4K + 1$ dalijasi iš 5

30. Kubo briaunos ilgis lygus $\sqrt{3}$. Į vieną iš kubo įstrižainių iš kiekvienos viršūnės nuleistas statmuo. Į kelias dalis viršūnių projekcijos dalija įstrižainę?

A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5 **E** 6



Klausimai po 3 taškus

1. Kam lygi skaičiaus 1000 pusės pusė?

A 200 **B** 125 **C** 225 **D** 250 **E** 175

2. Kam lygu $99 - 97 + 95 - 93 + \cdots + 3 - 1$?

A 48 **B** 64 **C** 32 **D** 50 **E** 0

3. Kuris iš skaičių didžiausias?

A $(1^2)^3$ **B** $(2^1)^3$ **C** $(2^3)^1$ **D** $(3^1)^2$ **E** $(1^3)^2$

4. Į kiek sričių plokštumą dalija trys tiesės, kurių kiekvienos dvi kertasi?

A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 6 **E** 7

5. Tėvui 50 metų, jis turi sūnų ir dukterį. Sūnus už dukterį vyresnis 4 metais. Po 8 metų tėvo amžius bus lygus jo abiejų vaikų amžių sumai. Kiek metų sūnui?

A 23 **B** 19 **C** 13 **D** 17 **E** 5

6. Funkcija $f(x) = x^2 + 2x + 1$:

A lyginė **B** nelyginė **C** didėja, kai $x > 0$ **D** monotoniška
E įgyja mažiausią reikšmę taške $x = 0$

7. Žemė skrieja aplink Saulę apskrita trajektorija ir nutolusi 150 mln. km nuo Saulės. Kokį atstumą Žemė nuskrieja per 1 sekundę (1 para = 86 400 sekundžių)?

A 6 m **B** 1,5 km **C** 8 km **D** 18 km **E** 30 km

8. Intervalų $[-5; -2]$, $(-3; 1]$, $[0; 1]$ sąjunga yra:

A $[-5; 0]$ **B** $(-3; -2)$ **C** tuščioji aibė **D** $[-5; 1]$ **E** $[5; 0]$

9. Vieną mėnesį trys sekmadieniai išpuolė lyginėmis mėnesio dienomis. Kokia savaitės diena buvo to mėnesio dvidešimtoji?

A Pirmadienis **B** Antradienis **C** Trečiadienis **D** Ketvirtadienis
E Kita diena

10. Kuriais metais kūrė garsusis Prancūzijos revoliucijos laikų matematikas Dalamberas (D'Alembert)?

A 100 pr. Kr. **B** 1910 **C** 800 **D** 1760 **E** 1516

Klausimai po 4 taškus

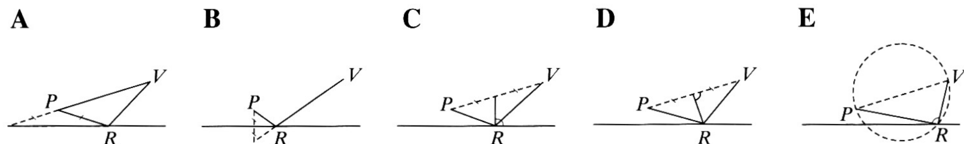
11. Jeigu kiekvienam 3 taškų klausimui skirsi po 1 min 30 s, o kiekvienam 4 taškų klausimui — po 2 min 30 s, tai kiek tau liks laiko kiekvienam 5 taškų klausimui?

A 3 min 30 s **B** 3 min **C** 4 min **D** 5 min **E** 2 min 45 s

12. Koks yra trikampis, kurio viršūnės — taškai (1; 2), (5; 0) ir (−1; −2)?

A Tokio trikampio nėra **B** Lygiašonis smailusis **C** Lygiakraštis
D Statusis lygiašonis **E** Nelygiašonis

13. Kempinge Paulius (taškas P) gyvena netoli Virginijos (taškas V). Kiekvieną rytą ją aplanko prieš tai prisėmęs iš upės jai kibirą vandens. Kiekvieną iš penkių kartų jis sėmė vandenį vis kitame taške R. Kuris iš jo maršrutų trumpiausias?



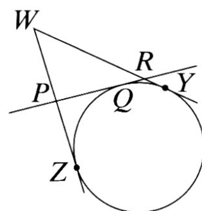
14. Duota, kad $x = 3$, $y = 1$ ir $z = 2$, taigi $x = y + z$. Kuriame pertvarkymų etape padaryta klaida?

A $x(x - y) = (y + z)(x - y)$ **B** Tada $x^2 - xy = xy + zx - y^2 - yz$
C $x^2 - xy - zx = xy - y^2 - yz$ **D** Todėl $x(x - y - z) = y(x - y - z)$
E Suprastinę iš reiškinio skliausteliuose, gauname $x = y$, t. y. $3 = 1$.

15. Ritinio pagrindas — skritulys, o aukštis lygus 3 m. Jo tūris, išreikštas kubiniais metrais, sutampa su jo viso paviršiaus plotu, išreikštu kvadratiniais metrais. Koks ritinio pagrindo spindulys (metrais)?

A 2 **B** 6 **C** 4 **D** 2π **E** Kitoks

16. Dvi tiesės, liečiančios apskritimą taškuose Z ir Y, kertasi taške W. Trečia tiesė, liečianti tą apskritimą taške Q, kerta atkarpą WZ taške P, o atkarpą WY taške R. Duota, kad $WZ = 20$. Kam lygus trikampio WPR perimetras?



A 42 **B** 36 **C** 50 **D** 40
E Tai priklauso nuo taško Q padėties

17. Sirakūzų pliažo smėlio smiltelės labai smulkios — į $1\,\mathrm{mm}^3$ telpa 10 smiltelių. 50 m pločio ir 2 km ilgio pliažo smėlio sluoksnio gylis yra 1 m. Kiek smiltelių yra pliaže?

A 10^{10} **B** 10^{13} **C** 10^{15} **D** 10^{17} **E** 10^{21}

18. Rombo kraštinė lygi a, o vieno iš jo kampų didumas yra 60°. Stačiojo ritinio pagrindas įbrėžtas į tą rombą, ritinio aukštinė lygi $3a$. Kam lygus ritinio tūris?

A $\frac{9\pi a^3}{16}$ **B** $3a^3\sqrt{3}$ **C** $\frac{a^3}{\sqrt{3}}$ **D** $\frac{27\pi a^3}{16}$ **E** $a^3\left(\frac{4}{3}\right)^3$

19. Duota, kad a ir b yra teigiami, $a \geqslant b$. Pažymėkime $u = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$. Kuri iš žemiau parašytų lygybių teisinga?

A $u = 2\sqrt{a+b}$ **B** $u = (a+b)\sqrt{2}$ **C** $u = a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$ **D** $u = 2\sqrt{a}$
E $u = 4a$

20. Nerdamas savo tinklą, voras tvėrė vis didesnius taisyklinguosius 30-kampius. Iš viso jis nunėrė 38 tokius daugiakampius. Mažiausią jų galima įbrėžti į 3 cm spindulio apskritimą, o didžiausią — į 18 cm spindulio apskritimą. Koks apytiksliai yra tinklo ilgis?

A 1 m **B** 24 m **C** 12 m **D** 18 m **E** Kitoks

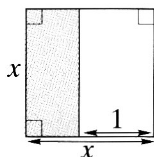
Klausimai po 5 taškus

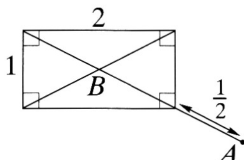
21. Padidinęs greitį 10 km/h, traukinys trasoje sutaupo 40 minučių. Sumažinęs greitį 10 km/h, traukinys praranda 1 valandą. Koks trasos ilgis?

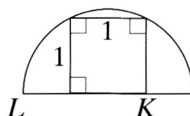
A 1400 km **B** 400 km **C** 120 km **D** 200 km
E Duomenys prieštaringi

22. Kuris iš žemiau išvardytų skaičių nėra lygus $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$?

A Teigiamasis lygties $x^2 - x - 1 = 0$ sprendinys
B Aukso skaičius
C Reikšmė x, su kuria pirmame paveikslėlyje užtušuotas plotas lygus 1

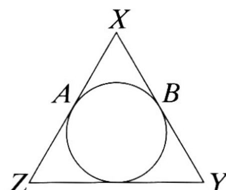






D Antrame paveikslėlyje pavaizduotos atkarpos AB ilgis
E Trečiame paveikslėlyje pavaizduotos atkarpos KL, esančios pusskritulio skersmenyje, ilgis

23. XYZ — lygiakraštis trikampis, į jį įbrėžtas apskritimas liečia dvi jo kraštines taškuose A ir B. To apkritimo lanko AB ilgis lygus 1. Kam lygus trikampio XYZ perimetras?



A $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$ **B** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **C** $\frac{6\sqrt{5}}{2\pi}$ **D** $\frac{9\sqrt{3}}{\pi}$
E Kitas atsakymas

24. Realusis skaičius k yra didžiausias skaičius, turintis tokią savybę: bet kuriems teigiamiesiems skaičiams a ir b, tenkinantiems lygybę $a + b = 1$, teisinga nelygybė $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) \geqslant k$. Tada:

A $k = 5$ **B** $k = 9$ **C** $k < 7$ **D** $k = 16$
E Reiškinio $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})$ reikšmė neaprėžta iš apačios

25. Iškilasis daugiakampis turi 119 įstrižainių. Kiek jis turi kraštinių?

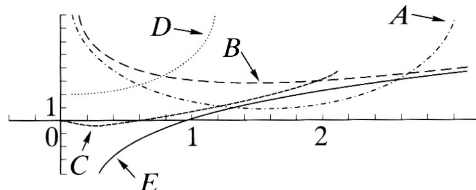
A 17 **B** Tai neįmanoma **C** 118 **D** 19 **E** Kitas atsakymas

26. Yra du druskos rūgšties tirpalai, kurių koncentracija yra atitinkamai 5% ir 12%. Kokiu santykiu juos reikia sumaišyti, kad gautume 9% koncentracijos tirpalą?

A 3 : 4 **B** 1 : 1 **C** 2 : 3 **D** 1 : 2 **E** 2 : 5

27. Kuri iš pavaizduotų kreivių yra funkcijos $y = \frac{1}{\sin x}$ grafikas?

A A **B** B **C** C
D D **E** E



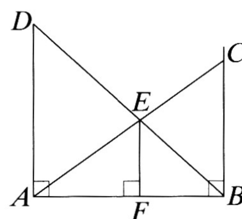
28. Kubo ir plokštumos sankirta niekada negali būti:

A penkiakampis **B** stačiakampis, bet ne kvadratas **C** atkarpa
D statusis trikampis **E** lygiakraštis trikampis

29. Pažymėkime raide S aibę tokių lygiakraščio trikampio vidaus taškų, kurių atstumų iki trikampio kraštinių suma yra mažiausia. Aibę S sudaro:

A trys trikampio viršūnės
B trys trikampio kraštinių vidurio taškai
C visi trikampio vidaus taškai
D aibė S tuščia
E trikampio centras

30. Mūrininkas dirba iškasoje, kurios plotis $AB = 6$ m. Kopėčios AC ir BD kertasi 3 m aukštyje ($EF = 3$ m). Kopėčių AC ilgis yra 8 m. Koks kopėčių BD ilgis?



A $\frac{12\sqrt{11-3\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}-3}$ **B** $\frac{6\sqrt{11-3\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}-3}$
C $\frac{12\sqrt{11-3\sqrt{6}}}{2\sqrt{6}-3}$ **D** $\frac{12\sqrt{12-3\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}-3}$
E Kitas atsakymas



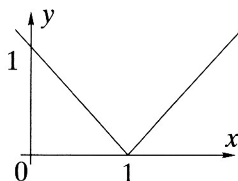
Klausimai po 3 taškus

1. Kiek yra trikampių, kurių viršūnės sutampa su iškilojo penkiakampio viršūnėmis?

A 10 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

2. Kurios iš žemiau nurodytų funkcijų grafikas čia pavaizduotas?

A $|x|+1$ **B** $|x|-1$ **C** $|x-1|$ **D** $|x+1|$
E $1-|x|$



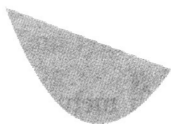
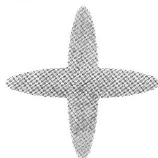
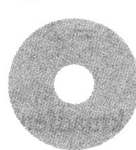
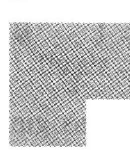
3. Kuris iš žemiau nurodytų skaičių didžiausias?

A 999 **B** 99^9 **C** $(9^9)^9$ **D** 9^{99} **E** 9^{9^9}

4. Kvadratiniai trinariai x^2+px+q ir x^2+qx+p turi vieną bendrą šaknį, $p \neq q$. Esant išpildytoms šioms sąlygoms, $p+q$ lygu:

A 1 **B** 0 **C** pq **D** $1-p$ **E** -1

5. Aibė M vadinama iškiląja, jei turi tokią savybę: jeigu taškai P ir Q priklauso aibei E, tai ir visa atkarpa PQ priklauso aibei E. Kuri iš žemiau išvardytų taškų aibių yra iškila?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

6. Žemiau parašytos lygtys atitinka keturias lygiagrečias tieses ir vieną, kuri nėra joms lygiagreti. Kuri tai tiesė?

A $x-2y=2$ **B** $y=2x+7$ **C** $-3x+6y+2=0$
D $5x=5+10y$ **E** $3y=1{,}5x-4$

7. Paplitęs popieriaus formatas A4 yra stačiakampis, kurio santykis $v=\frac{\text{ilgis}}{\text{plotis}}$ parinktas toks, kad, sulenkus lapą pusiau per ilgio vidurį, gaunamas naujas stačiakampis su tuo pačiu santykiu $v=\frac{\text{ilgis}}{\text{plotis}}$. Tas santykis v tenkina sąlygą:

A $v=4$ **B** $v^2=4$ **C** $v^3=4$ **D** $v^4=4$ **E** $v=0{,}5(1+\sqrt{5})$

8. Nuspalviname kubą, o tada jį supjaustome į 27 mažesnius kubelius. Kai kurie jų turi 3 nuspalvintas sienas, kiti 2, 1 arba neturi nė vienos nuspalvintos sienos. Kurios rūšies kubelių yra daugiausia?

A Kurių nenuspalvinta nė viena siena **B** Kurių nuspalvinta 1 siena
C Kurių nuspalvintos 2 sienos **D** Kurių nuspalvintos 3 sienos
E Daugiausia yra ne vienos rūšies kubelių

9. Taškas $(-2; 4)$ yra atkarpos PQ vidurys, $P(2; -2)$. Taško Q koordinatės yra:

A $(0; 1)$ **B** $(-6; 6)$ **C** $(6; -6)$ **D** $(-2; 6)$ **E** $(-6; 10)$

10. Lygiašoniame trikampyje bukasis kampas tarp lygių kampų pusiaukampinių triskart didesnis už kampą prie trikampio viršūnės. To trikampio kampai lygūs:

A $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$ **B** $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$ **C** $40^\circ, 70^\circ, 70^\circ$
D $110^\circ, 35^\circ, 35^\circ$ **E** $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$

Klausimai po 4 taškus

11. n-kampio kraštinės lygios $1, 2, ..., 2^{n-1}$. Kokia mažiausia galima n reikšmė?

A 3 **B** 4 **C** 5 **D** Didesnė už 5 **E** Tokių n reikšmių iš viso nėra

12. Skaičius h vadinamas skaičių a ir b harmoniniu vidurkiu, jeigu $\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Kiek yra natūraliųjų skaičių porų $(a; b)$, $a < b$, kurių harmoninis vidurkis lygus 5?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Kitas atsakymas

13. Kiekvienam natūraliajam skaičius n tegu $D(n)$ reiškia skaičiaus n natūraliųjų daliklių aibę, o $d(n)$ — aibės $D(n)$ elementų skaičių. Pavyzdžiui, $D(6) =$ $= \{1, 2, 3, 6\}$, o $d(6) = 4$. Kuris iš žemiau parašytų teiginių yra teisingas visiems n?

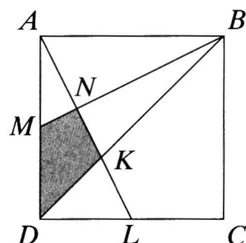
A $d(2^n) = 1$ **B** $d(2^n) = 2$ **C** $d(2^n) = n$ **D** $d(2^n) = n + 1$
E $d(2^n) = \frac{n(n+1)}{2}$

14. Vienas žmogus gimė sekmadienį, vasario 29 dieną. Po kelerių metų jis švęs gimtadienį vėl sekmadienį, vasario 29 dieną?

A Po 8 metų **B** Po 28 metų **C** Po 35 metų **D** Po 44 metų
E Niekada

15. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 2, taškas M yra kraštinės AD vidurio taškas, o L — kraštinės DC vidurio taškas. Kam lygus keturkampio $MNKD$ plotas?

A $\frac{1}{3}$ **B** $\frac{2}{5}$ **C** $\frac{7}{15}$ **D** $\frac{8}{15}$ **E** $\frac{3}{5}$



16. Duota, kad $0 < a < b$. Kuri iš žemiau nurodytų nelygybių nėra visada teisinga?

A $a^2 < b^3$ **B** $a + 2 < b + 3$ **C** $2a < 3b$ **D** $\frac{2}{b+3} < \frac{3}{a+2}$
E $(a + 2)^2 < (b + 3)^3$

17. Nupjautos žolės drėgnis lygus 60%, o šieno drėgnis lygus 15%. Kiek šieno gausime išdžiovinę 1 toną žolės?

A $\frac{8000}{17}$ kg **B** 460 kg **C** 850 kg **D** 900 kg **E** 615 kg

18. Paveikslėlyje pavaizduotas kvadratas, kurio kraštinė lygi 1, ir keturi vienodo spindulio pusskrituliai, kurie išdėstyti simetriškai kvadrato viduje ir liečia vienas kitą. Užtušuotos srities plotas lygus:

A $\frac{\pi}{2}$ **B** $1 - \frac{\pi}{4}$ **C** $4 - \pi$ **D** $\sqrt{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$
E Kitas atsakymas

19. Kiek yra sveikųjų skaičių tarp 9999 ir 100 000, kurių skaitmenų suma lygi 2?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 5 **E** Nė vieno

20. Eifelio bokštas visas padarytas iš geležies, sveria 8 000 000 kg ir yra 300 m aukščio. Koks bus jo 1 kg masės geležinio modelio aukštis?

A 8 cm **B** 80 cm **C** 8 m **D** 1,5 m **E** 0,0375 m

Klausimai po 5 taškus

21. Trikampis ABC lygiašonis, kampai ABC ir yra BCA lygūs ir dukart didesni už kampą BDC, kurį sudaro liestinės taškuose C ir B. Kam lygus kampas A?

A $\frac{3\pi}{7}$ **B** $\frac{4\pi}{9}$ **C** $\frac{5\pi}{11}$ **D** $\frac{6\pi}{13}$ **E** $\frac{7\pi}{15}$

22. Trikampyje ABC paimtas toks kraštinės AC taškas P, kad $AP : AC = 1 : 4$, ir toks kraštinės CB taškas Q, kad $CQ : CB = 1 : 3$. Raide X pažymėkime tiesių BP ir AQ susikirtimo tašką. Kokiu santykiu tiesė CX dalija kraštinę AB?

A 1:3 **B** 1:6 **C** 4:1 **D** 1:5 **E** 2:5

23. Tiesės, kurių lygtys yra $y = ax$ ir $y = -x + b$, kertasi taške, kurio abi koordinatės neigiamos. Iš to išplaukia, kad:

A $a > 0$ ir $b > 0$ **B** $a > 0$ ir $b < 0$ **C** $a < 0$ ir $b > 0$
D $a < 0$ ir $b < 0$ **E** $b > 0$ ir $a < -1$

24. Trikampio ABC pusiaukraštinės, išvestos iš viršūnių B ir C, yra statmenos. Iš to išplaukia, kad $CA^2 + BA^2$ lygu:

A BC^2 **B** $2BC^2$ **C** $3BC^2$ **D** $4BC^2$ **E** $5BC^2$

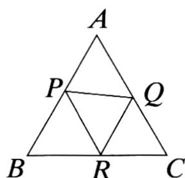
25. Sferos viduje yra keturkampė piramidė. Piramidės visas sienas pratęsiame iki susikirtimo su sfera. Į kiek dalių bus padalyta sfera?

A 10 **B** 11 **C** 12 **D** 13 **E** 14

26. 1993 metais Prancūzijos „Kengūros" konkurse dalyvavo 782 gimnazijos, 2921 koležas ir 929 licėjai. Bet buvo mokyklų, kurios užsiregistravo vienu metu keliose kategorijose, todėl 29 gimnazijos dalyvavo visose trijose kategorijose (ir kaip gimnazijos, ir kaip koležai, ir kaip licėjai), 703 gimnazijos, 2675 koležai ir 725 licėjai užsiregistravo tik savo kategorijose. Kiek buvo mokyklų, kurios tuo pat metu užsiregistravo dviejose kategorijose: ir kaip gimnazija, ir kaip licėjus?

A 4 **B** 25 **C** 171 **D** 70 **E** Trūksta duomenų

27. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinė lygi 3. Trikampis PQR gautas sulenkus trikampį ABC per tiesę PQ taip, kad viršūnė A atsidūrė kraštinės BC taške R. Koks atkarpos PQ ilgis, jei $BR = \frac{1}{3}BC$?



A $\frac{1}{8}$ **B** $\frac{7}{20}\sqrt{21}$ **C** $0{,}5(1 + \sqrt{5})$ **D** $\frac{13}{8}$ **E** $\sqrt{3}$

28. Turime seką $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, kur $n = 2, 3, 4, \ldots$, $u_0 = 0$ ir $u_{10} = 10$. Kam lygu u_1?

A Tokios sekos nėra **B** Neįmanoma nustatyti
C $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ **D** $u_1 = \frac{2}{11}$ **E** $u_1 = 1$

29. Jeigu $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ ir $f(g(x)) = 12x^4 + 56x^2 + 70$, tai daugianario $g(x)$ koeficientų suma gali būti lygi:

A -7 **B** $\frac{-19}{3}$ **C** $\frac{-7}{3}$ **D** 3 **E** 23

30. Jeigu $a\Box b = ab + a + b$ ir $3\Box 5 = 2\Box x$, tai x lygus:

A 4 **B** 6 **C** 7 **D** $7\frac{1}{2}$ **E** $11\frac{1}{2}$



Klausimai po 3 taškus

1. Šiandien ketvirtadienis, 1995 metų kovo 8 diena. Paskutinė XX šimtmečio diena bus:

A 1999 m. gruodžio 31 d. **B** penktadienis, 13 d.
C 2000 m. sausio 1 d. **D** 2000 m. gruodžio 31 d.
E 2000 m. gruodžio 31 d. Šiaurės pusrutulyje ir 2001 m. sausio 1 d. Pietų pusrutulyje

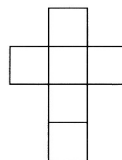
2. Karolina labai pedantiška. Pradėdama spręsti 75 minučių *Kengūros* testą, ji nusprendė laikytis tokios strategijos:

- palikti 5 minučių atsargą galimiems pataisymams;
- dešimčiai sunkių uždavinių (21–30 klausimai po 5 taškus) skirti dukart daugiau laiko nei vidutiniams uždaviniams (11–20 klausimai po 4 taškus);
- lengviems uždaviniams (1–10 klausimai po 3 taškus) skirti pusę laiko, nustatyto vidutiniams uždaviniams.

Kiek laiko skyrė Karolina spręsti visiems lengviesiems uždaviniams?

A 5 minutes **B** 480 sekundžių **C** 10 minučių **D** 800 sekundžių
E 15 minučių

3. Paveikslėlyje kryžiaus formos figūra sudėta iš 6 kvadratų. Tos figūros perimetras lygus 6. Koks jos plotas?



A 1 **B** 1,5 **C** $\frac{18}{7}$ **D** $\frac{54}{49}$ **E** $\frac{27}{48}$

4. Plokštumoje duoti trys taškai: $P(-2; 0)$, $Q(0; 2)$, $R(2; 0)$. Kuri iš žemiau išvardytų lygčių reiškia tiesę, lygiagrečią atkarpai PQ ir einančią per atkarpos PR vidurį?

A $y - x = 0$ **B** $y = -x$ **C** $x = 0$ **D** $y + x + 2 = 0$
E Kitas atsakymas

5. Ona labai patenkinta savo dalyvavimu „Kengūros“ konkurse. Ji teisingai atsakė į 20 klausimų, tik neatsimena, į kuriuos. Taip pat ji nepamena, kaip ten buvo su likusiais uždaviniais — į kiek iš jų atsakė klaidingai, o į kiek iš viso neatsakinėjo. Prisiminęs vertinimo taisykles ir atsižvelgęs į tai, kad kiekvienas dalyvis pradėdamas gauna 30 taškų, pasakyk:

Ona taškų surinko ne mažiau kaip

A 120 **B** 100 **C** 90 **D** 70 **E** 50

6. Su kuria parametro p reikšme lygtys $(p-1)x=1$ ir $p(x-1)=1-p$ turi lygiai vieną bendrą sprendinį?

A -1 **B** 0 **C** 1 **D** 0 ir 1 **E** Tokios reikšmės nėra

7. Mano tėtis trigubai vyresnis už mane. Turiu du brolius — 11 metų ir 9 metų amžiaus. Man metų penkis kartus daugiau nei jaunėlio brolio metų trečdalis. Po kelerių metų tėčio amžius bus lygus visų trijų jo vaikų amžių sumai?

A 10 **B** 5 **C** 3 **D** 1 **E** 7

8. Duotas kubas, kuriame didžiausias atstumas tarp viršūnių yra 1 m. Kam lygus kubo tūris (m^3)?

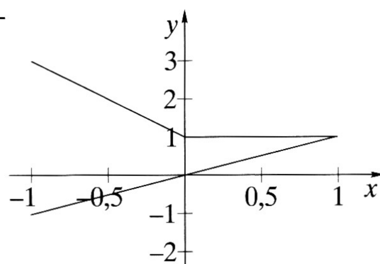
A $\frac{\sqrt{3}}{9}$ **B** 1 **C** $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **D** $\frac{1}{3}$ **E** 2

9. Kuris iš išvardytų skaičių yra didžiausias?

A 19^{95} **B** 199^5 **C** 1995 **D** 5^{991} **E** 59^{91}

10. Paveikslėlyje pavaizduoti grafikai dviejų funkcijų, apibrėžtų intervale $[-1; 1]$. Kurių?

A $f(x)=|1-x|$ ir $g(x)=1$
B $f(x)=|x|+|1-x|$ ir $g(x)=x$
C $f(x)=-2x+1$ ir $g(x)=x$
D $f(x)=x-|2x|$ ir $g(x)=1$
E Kitas atsakymas



Klausimai po 4 taškus

11. Kiek sveikųjų sprendinių turi nelygybė $\big|1-|x|\big| \leqslant 3$?

A 9 **B** 8 **C** 1 **D** 2 **E** 0

12. Kiekvienam nelygių nuliui realiųjų skaičių trejetui (a, b, c) sudarome skaičių

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}.$$

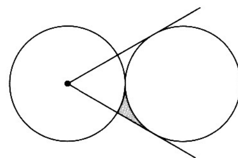
Kokia yra taip sudarytų skaičių aibė?

A $\{0\}$ **B** $\{-4, 0, 4\}$ **C** $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$ **D** $\{-4, -2, 2, 4\}$
E Nė vienas iš ankstesnių atsakymų

13. Skaičių $\sqrt[3]{4}$ ir $\sqrt[4]{8}$ sandauga lygi:

A $\sqrt[7]{12}$ **B** $2\sqrt[7]{12}$ **C** $\sqrt[7]{32}$ **D** $\sqrt[12]{32}$ **E** $2\sqrt[12]{32}$

14. Du apskritimai liečia vienas kitą iš išorės, jų spinduliai lygūs 10. Iš kairiojo apskritimo centro išvestos dešiniojo apskritimo liestinės. Koks paveikslėlyje užtušuotos srities plotas?



A 10 **B** $25(2\sqrt{3} - \pi)$ **C** $25(4\sqrt{3} - \pi)$
D $100 - \pi$ **E** Kitas atsakymas

15. Taškas M yra trikampio ABC kraštinės BC vidurio taškas. Jei $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$ ir $AM = 5\,\text{cm}$, tai trikampio ABC plotas (cm^2) lygus:

A 15 **B** 14 **C** 12 **D** 10 **E** 8

16. Jeigu $(2x - 1)^{1995}$ išskleisime ir parašysime mažėjančiais x laipsniais, tai gausime $a_{1995}x^{1995} + a_{1994}x^{1994} + \cdots + a_0$. Visų šio daugianario koeficientų suma

$a_{1995} + a_{1994} + \cdots + a_0$ lygi:

A 0 **B** 1 **C** 1995 **D** -1 **E** 2

17. Jeigu funkcija $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$ tenkina sąlygą $f(f(x)) = x$ visiems $x \neq -\frac{3}{2}$, tai koeficientas c yra lygus:

A -3 **B** $-\frac{3}{2}$ **C** $\frac{3}{2}$ **D** 3
E Trūksta duomenų koeficientui c nustatyti

18. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC atitinkamai paimti tokie taškai M ir N, kad $AM : MC = 2 : 3$ ir $BN : NC = 1 : 2$. Raskite trikampių MNC ir ABC plotų santykį.

A $\frac{1}{5}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{2}{5}$ **E** $\frac{3}{10}$

19. Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AB = 40$ ir $CD = 16$. Pagrinde AB paimtas toks taškas P, kad atkarpa DP dalija trapecijos plotą pusiau. Koks atkarpos AP ilgis?

A 16 **B** 20 **C** 28 **D** 32 **E** 36

20. Skaičiai x, y, z tenkina lygybes $yz = -6$, $zx = 2$, $xy = -3$. Kam lygu $x + y + z$?

A 0 **B** 1 **C** 2 arba 1 **D** 1 arba -1 **E** Kitas atsakymas

Klausimai po 5 taškus

21. Prieš dvidešimt du amžius gyvenau Sirakūzuose. Apskaičiavau parabolės išpjovos plotą ir dar daug kitų dalykų. Įrodžiau, kad apie sferą apibrėžto ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus tos sferos paviršiaus plotui. Visi girdėjo mano posakį:

„Duokite man atramos tašką, ir ...“

Kas aš esu?

A Ciceronas **B** Periklis **C** Archimedas **D** Euklidas
E Augustinas

22. Kurios iš išvardytų plokštumos sričių plotas yra didžiausias?

A $|x+1| < 0$ **B** $x^2+y^2 < 1$ **C** $|x|+|y| < 1$ **D** $1 < x^2+y^2 < 9$
E $\max(|x|, |y|) < 1$

23. Jeigu $x < 0$, tai $\left|x - \sqrt{(x-1)^2}\right|$ lygu:

A 1 **B** $1-2x$ **C** $-2x-1$ **D** $1+2x$ **E** $2x-1$

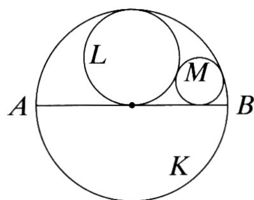
24. Nelygybės $|x-1| + |x+2| < 5$ sprendiniai yra:

A $-3 < x < 2$ **B** $-1 < x < 2$ **C** $-2 < x < 1$ **D** $-\frac{3}{2} < x < \frac{7}{2}$
E Sprendinių nėra

25. Skaičiai m, n, p, q yra realieji, $f(x) = mx + n$, $g(x) = px + q$. Tada lygtis $f(g(x)) = g(f(x))$ turi sprendinių:

A visoms m, n, p, q reikšmėms
B tada ir tik tada, kai $m = p$ ir $n = q$
C tada ir tik tada, kai $mq - np = 0$
D tada ir tik tada, kai $n(1-p) - q(1-m) = 0$
E tada ir tik tada, kai $(1-n)(1-p) - (1-m)(1-q) = 0$

26. Paveikslėlyje AB yra apskritimo K skersmuo. Apskritimas L liečia atkarpą AB apskritimo K centre ir apskritimą K. Apskritimas M liečia apskritimus K ir L, taip pat atkarpą AB. Kam lygus skritulio K ir skritulio M plotų santykis?

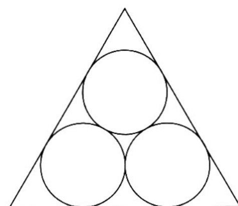


A 12 **B** 14 **C** 16 **D** 18 **E** 20

27. Pusapskritimyje išvestos trys skersmeniui lygiagrečios stygos. Jų ilgiai yra 20, 16 ir 8, o atstumai tarp stygų lygūs. Kam lygus pusapskritimio spindulys?

A 12 **B** $m\sqrt{7}$ **C** $\frac{5\sqrt{65}}{3}$ **D** $\frac{5\sqrt{22}}{2}$ **E** Trūksta duomenų

28. Paveikslėlyje kiekviena taisyklingojo trikampio kraštinė liečia du apskritimus, o kiekvienas iš apskritimų liečia kitus du iš išorės. Apskritimų spinduliai lygūs 3. Kam lygus trikampio perimetras?



A $36 + 9\sqrt{2}$ **B** $36 + 6\sqrt{3}$ **C** $36 + 9\sqrt{3}$
D $18 + 18\sqrt{3}$ **E** 45

29. Kam lygus reiškinio

$$T = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

kvadratas?

A 1 **B** 2 **C** $\sqrt{6}$ **D** $\sqrt{5}$ **E** 3

30. Skaičiaus n dešimtainį užrašą sudaro 1995 devynetai. Kiek devynetų yra skaičiaus n^2 dešimtainiame užraše?

A 0 **B** 1 **C** 1994 **D** 1995 **E** 1996



Klausimai po 3 taškus

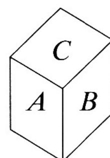
1. Iš kelių skaitmenų susideda skaičiaus $2^{12} \cdot 5^8$ dešimtainis užrašas?

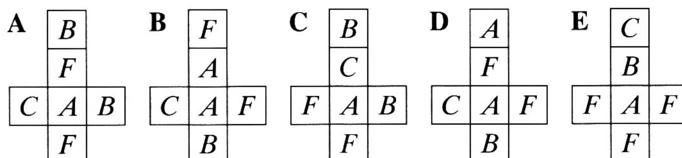
A 20 **B** 12 **C** 10 **D** 96 **E** Kitas atsakymas

2. Kuris iš nurodytų skaičių didžiausias?

A $(9^9)^9$ **B** $9^{(9^9)}$ **C** 99^9 **D** 9^{99} **E** 999

3. Kuri išklotinė atitinka paveikslėlyje pavaizduotą kubą?

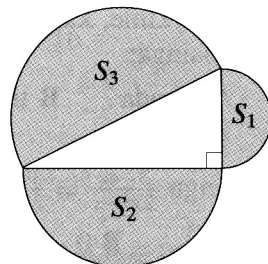




4. Pardavėjas pakėlė prekės kainą 10%, vėliau dar 5%. Matydamas, kad prekė parduodama prastai, iš pradžių sumažino jos kainą 5%, vėliau dar 10%. Palyginkite galutinę ir pradinę prekės kainas.

A Tokia pati **B** Padidėjo **C** Sumažėjo
D Tai priklauso nuo pradinės kainos **E** Atsakyti neįmanoma

5. Ant stačiojo trikampio kraštinių nubrėžti pusapskritimiai. Jų plotai pažymėti S_1, S_2, S_3. Kuris teiginys teisingas?



A $S_1 + S_2 = S_3$ **B** $2S_1 + S_2 = S_3$
C $S_1 + 2S_2 = S_3$ **D** $S_1 + S_2 > S_3$
E $S_1 + S_2 < S_3$

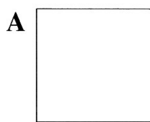
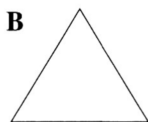
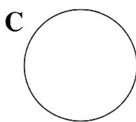
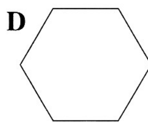
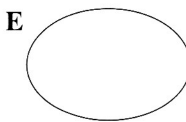
6. Keliais būdais galime iškeisti smulkesniais 5 Lt, jei turime tik 1 Lt, 50 ct ir 10 ct monetų?

A 3 **B** 10 **C** 15 **D** 36 **E** 50

7. Kiek sveikųjų sprendinių turi nelygybė $\big|2 - |x|\big| \leqslant 5$?

A 7 **B** 8 **C** 13 **D** 15 **E** Kitas atsakymas

8. Paveikslėlyje pavaizduotos formos dangčių, dengiančių gatvių kanalizacijos šaltinių angas. Angos turi tą pačią formą, tik truputį mažesnės. Dangčiai turi būti tokie, kad net nevykusiai atidengiant šulinį dangtis negalėtų į jį įvirsti. Kuris dangtis tenkina minėtą sąlygą?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

9. Iškilojo n-kampio kampų suma lygi:

A $(n-2)\pi$ **B** $(n^2-6n+10)\pi$ **C** $n\pi$ **D** $2n\pi$ **E** $\frac{1}{2}n\pi$

10. Kuris iš nurodytų trejetų negali reikšti trikampio kraštinių ilgių?

A 6, 8, 10 **B** 5, 12, 13 **C** 7, 24, 25 **D** 9, 40, 41 **E** 11, 42, 55

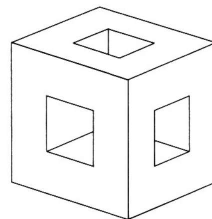
Klausimai po 4 taškus

11. Dabar vieno miesto gyventojų skaičius yra 100 000 ir kasmet padidėja 10%. Po dešimties metų gyventojų skaičius apytiksliai bus lygus:

A 110 000 **B** 150 000 **C** 180 000 **D** 200 000 **E** 260 000

12. Kubo briauna lygi 3 cm. Iš jo išpjauti 3 kanalai, kurių skersinis pjūvis — kvadratas su kraštine 1 cm (žr. paveikslėlį). Koks yra gauto kūno tūris (cm^3)?

A 16 **B** 17 **C** 18 **D** 19 **E** 20



13. Sakykime, kad a ir b — neneigiamieji skaičiai. Lygybė $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ teisinga:

A visada **B** tik kai $a+b=0$ **C** tik kai $ab=0$ **D** tik kai $a=b$
E niekada

14. Jeigu $\frac{3-4x}{2x^2-x}=\frac{3}{2}$, tai kam lygu $\frac{6-4x}{2x^2-x+2}$?

A $\frac{3}{2}$ **B** 0 **C** $\frac{2}{3}$ **D** 1 **E** Neįmanoma apskaičiuoti

15. Skruzdėlė ruošiasi užlipti ant dėžutės viršaus. Dėžutė yra ritinys, kurio aukštinė a, o pagrindo skersmuo b. Bet lipdama skruzdėlė nori įsitikinti, ar arti nėra skruzdėdos, todėl keliaudama į viršų taip pat turi apeiti dėžutę aplinkui. Koks trumpiausio skruzdėlės kelio ilgis?

A $a+\frac{b}{2}$ **B** $a+\pi b$ **C** $a+2\pi b$ **D** $\sqrt{a^2+\pi^2b^2}$
E Nė vienas iš tų atsakymų

16. Ar trigubo skaičiaus pusės kubas lygus trigubai to skaičiaus kubo pusei?

A Taip, kiekvienam skaičiui **B** Tik skaičiui 0 **C** Tik skaičiui 1
D Tik skaičiams 0 ir 1 **E** Nelygus jokiam realiajam skaičiui

17. Su kuria parametro p reikšme lygtys $(p+1)x = 3$ ir $p(x-1) = 1+p$ turi tą patį sprendinį?

A $p = 1$ **B** $p = 0$ **C** $p = 3$ **D** $p = -2$ **E** Kitas atsakymas

18. Keliais būdais taisyklingąjį tetraedrą, kurio viršūnės nuspalvintos skirtingomis spalvomis, galima įdėti į dėžutę $ABCD$, turinčią tokią pat taisyklingojo tetraedro formą?

A 3 **B** 4 **C** 6 **D** 12 **E** 24

19. Operacija $\square$ visų skaičių aibėje yra apibrėžta formule $a \square b = ab + 2a - b$. Kuriam skaičiui b teisinga lygybė $3 \square 5 = 2 \square b$?

A $\frac{1}{2}$ **B** 3 **C** 12 **D** 10 **E** $\frac{5}{12}$

20. Kuriam skaičiui iš aibės $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ neteisingas lygiai vienas iš teiginių:
x — sveikasis skaičius;
$x^2 - 3x$ — neigiamasis skaičius;
$x + \frac{1}{x}$ — sveikasis skaičius?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

Klausimai po 5 taškus

21. Kam lygu 10! (dešimt faktorialas) sekundžių?

A 24 valandos 30 minučių 20 sekundžių **B** 1 para **C** 1 metai
D 6 savaitės **E** 7 savaitės

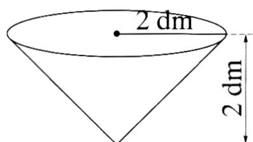
22. Skaičiai a, b ir c atitinkamai proporcingi skaičiams 1, 2 ir 4. Kokiems skaičiams proporcingi skaičiai $a(b+c)$, $b(c+a)$ ir $c(a+b)$?

A 3, 4 ir 5 **B** 6, 10 ir 12 **C** 4, 5 ir 6 **D** 1, 4 ir 16
E Kitas atsakymas

23. Lygybė $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$ teisinga:

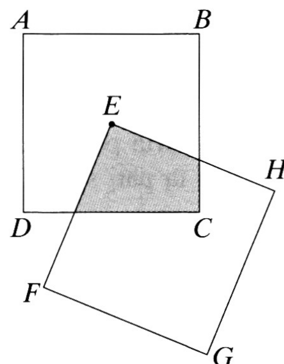
A bet kuriam skaičiui x **B** kai $-1 \leqslant x \leqslant 1$ **C** kai $x \geqslant 1$
D kai $x \leqslant 1$ **E** kai $x \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$

24. Iš sklidino kūgio formos indo (matmenis žr. paveikslėlyje) vandenį išpilame į kubo su kraštine 2 dm formos indą. Kokį aukštį sieks vanduo (decimetrais)?



A $\frac{2}{3}$ **B** $\frac{3}{2}$ **C** $\frac{\pi}{2}$ **D** $\frac{\pi}{3}$ **E** Vanduo išsilies per kraštus

25. Kvadratų $ABCD$ ir $EFGH$ kraštinė lygi a. Jie padėti plokštumoje taip, kad antrojo kvadrato viršūnė E sutampa su kvadrato $ABCD$ centru. Kam lygus kvadratų bendros dalies plotas?



A $\frac{a^2}{4}$ **B** $\frac{a^2}{3}$ **C** $\frac{a^2}{2}$ **D** $\frac{a^2}{6}$
E Priklauso nuo antrojo kvadrato padėties

26. Sekos pirmi trys nariai yra a, b, c. Kiekvienas tolesnis narys yra lygus trijų prieš jį einančių narių sumai. Duota, kad $a = 4$ ir $c = -b$. Kuriam skaičiui b tos sekos devintas narys lygus 0?

A $\frac{52}{3}$ **B** 0 **C** 13 **D** -4 **E** Kitas atsakymas

27. Plokštumoje duota aibė tiesių, apibrėžtų lygtimis

$$(m+1)x + (m-2)y - 5m + 4 = 0,$$

kur m — bet kuris skaičius. Kuris iš teiginių teisingas?

A Visos tiesės eina per koordinačių pradžios tašką
B Visos tiesės turi vieną bendrą tašką
C Visos tiesės lygiagrečios
D Kai $m = \frac{5}{4}$, tai tiesė eina per koordinačių pradžios tašką
E Neteisingi visi ankstesni teiginiai

28. Kurią iš žemiau išvardytų sąlygų tenkina α, jei lygtis $\sin x = 0{,}5$ turi lygiai vieną sprendinį intervale $[0; \alpha]$?

A $\alpha = 0$ **B** $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ **C** $0 < \alpha \leqslant \pi$ **D** $\frac{\pi}{5} < \alpha \leqslant \frac{2\pi}{3}$
E Taip nėra esant bet kuriai nurodytai sąlygai

29. Koks yra pozicinės sistemos pagrindas, jei joje teisinga lygybė $26 \cdot 23 = 642$?

A 6 **B** 8 **C** 10 **D** 12 **E** Kitas atsakymas

30. Koks yra ilgiausias intervalas, kuriame funkcijos

$$f(x) = |\sin x| \quad \text{ir} \quad g(x) = \sin|x|$$

įgyja vienodas reikšmes?

A $[0; \pi]$ **B** $[0; 2\pi]$ **C** $[-\pi; \pi]$ **D** $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
E Tokio intervalo nėra



1997 metai

Klausimai po 3 taškus

1. Kiek skaitmenų yra skaičiaus $4^5 \cdot 5^{13}$ dešimtainiame užraše?

A 12 **B** 13 **C** 16 **D** 17 **E** 18

2. Šiais metais (1997 m.) mano amžius yra a metų. Tikuosi, kad gyvensiu dar labai ilgai, gal net visą amžinybę! Kuriais metais būčiau 10 kartų vyresnis, nei dabar?

A $10 \cdot 1997$ **B** $10a \cdot 1997$ **C** $1997 + 10a$ **D** $1997 + 9a$
E $(1997 - a) \cdot 10$

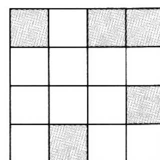
3. Iš plokštumos taško išvesta 20 spindulių. Kiek daugiausia stačiųjų kampų gali sudaryti tie spinduliai?

A 10 **B** 20 **C** 30 **D** 40 **E** 50

4. Skaičiams a, b, c atvirkštinių skaičių sumos atvirkštinis yra:

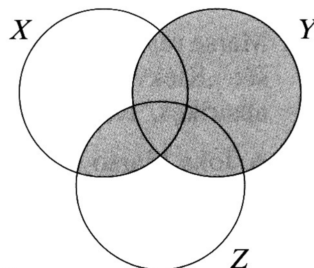
A $\frac{ab+bc+ca}{abc}$ **B** $\frac{abc}{ab+bc+ca}$ **C** $a+b+c$ **D** $\frac{3}{a+b+c}$ **E** $\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}$

5. Kiek mažiausiai kvadratėlių reikia užtušuoti, kad gautoji figūra turėtų simetrijos centrą?



A 5 **B** 2 **C** 1 **D** 3 **E** 4

6. Kuri iš žemiau nurodytų aibių užtušuota paveikslėlyje?



A $(X \cap Y) \cup Z$ **B** $(X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
C $(X \cap Z) \cup Y$ **D** $Y \cap (X \cap Z)$ **E** $Z \cap (X \cup Y)$

7. Skaičiaus $\sqrt{2^{100}}$ lygus:

A 250 **B** $\left(\sqrt{2}\right)^{10}$ **C** 2^{10} **D** 2^{50} **E** 2^{200}

8. Vandens paviršiuje plūduriuoja 5 cm spindulio teniso kamuoliukas, paniręs į vandenį 2 cm. Ištraukto iš vandens kamuoliuko paviršiaus dalis sušlapusi. Kam lygus spindulys apskritimo, skiriančio kamuoliuko paviršiaus sausą dalį nuo sušlapusios?

A 3 cm **B** $\sqrt{5}$ cm **C** 4 cm **D** $\sqrt{21}$ cm **E** 5 cm

9. Skaičius

$$a = 999\,222^2 \quad \text{ir} \quad b = 999\,221 \cdot 999\,223$$

sieja sąryšis:

A $a^2 = b^2 - 1$ **B** $b = a + 1$ **C** $a = b + 1$ **D** $a = 2b$ **E** $b = a$

10. Į aikštę veda 6 gatvės. Iš jų 2 yra vienkrypčio eismo, kuriomis galima važiuoti tik aikštės kryptimi, o 4 likusios — dvikrypčio eismo. Kiek yra maršrutų nuvažiuoti į aikštę ir išvažiuoti iš jos?

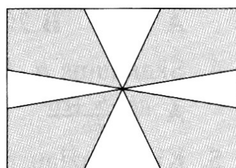
A 12 **B** 20 **C** 24 **D** 28 **E** 48

Klausimai po 4 taškus

11. Kokią plokštumos figūrą atitinka lygties $x^2 + xy = 0$ sprendinių aibė?

A Tiesę **B** Apskritimą **C** Dvi tieses **D** Tašką **E** Tuščiąją aibę

12. Kiekviena stačiakampio kraštinė padalyta į 3 lygias dalis. Sujungus per centrą dalijimo taškus ir užtušavus kas antrą sritį, gautas pavaizduotas piešinys. Koks yra baltosios ir juodosios dalių plotų santykis?



A 1:1 **B** 1:2 **C** 1:3 **D** 1:4 **E** 2:3

13. Kiek yra tokių sveikųjų skaičių n, su kuriais skaičius $\frac{n+11}{n+7}$ taip pat sveikas?

A 0 **B** 5 **C** 8 **D** 6 **E** Be galo daug

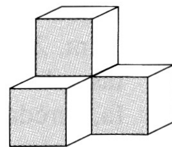
14. Marse rastos būtybės, kiekviena iš kurių turi galvų. Vienas mokslininkas parašė: „Kiekvienas Marso gyventojas turi dvi galvas“. Kiek vėliau jis prisipažino apsirikęs. Kuris iš žemiau pateiktų teiginių yra teisingas?

A Joks Marso gyventojas neturi dviejų galvų
B Kiekvienas Marso gyventojas turi arba vieną galvą, arba daugiau kaip dvi
C Yra toks Marso gyventojas, kuris turi vieną galvą
D Tarp Marso gyventojų yra tokių, kurie turi gal vieną galvą, o gal daugiau kaip dvi
E Yra toks Marso gyventojas, kuris turi daugiau kaip dvi galvas

15. Kuriai iš žemiau nurodytų realiųjų skaičių x ir y porų $(x; y)$ egzistuoja toks skaičius a, kad teisingos nelygybės $a < x < a^4 < y < a^2$?

A $(0; 1)$ **B** $(-1; 0)$ **C** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ **D** $(-1; 1)$ **E** $(1; 2)$

16. Paveikslėlyje pavaizduota detalė sudaryta iš keturių kubelių $1 \times 1 \times 1$. Kurio kubo negalima sudėti iš tokių detalių?

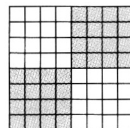


A $9 \times 9 \times 9$ **B** $8 \times 8 \times 8$ **C** $6 \times 6 \times 6$
D $4 \times 4 \times 4$ **E** $2 \times 2 \times 2$

17. Penkių skaičių sekoje nenurodyti trys skaičiai: 2; ...; ...; ...; 500. Duota, kad kiekvienas sekos narys, pradedant trečiuoju, yra lygus dviejų prieš jį esančių narių sandaugai. Kam lygi trijų nenurodytų skaičių sandauga?

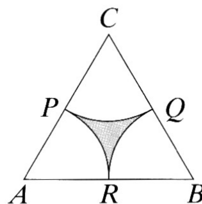
A 5000 **B** 10 000 **C** 2000 **D** 2500 **E** Apskaičiuoti neįnamona

18. Gardelėje 8×8 kai kurie kvadratėliai užtušuoti, kaip pavaizduota paveikslėlyje. Kiek yra iš kvadratėlių sudarytų kvadratų, kuriuose baltų ir juodų kvadratėlių yra tiek pat?



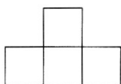
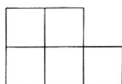
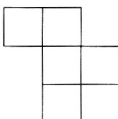
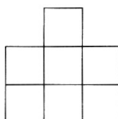
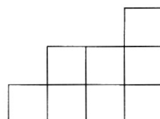
A 13 **B** 4 **C** 28 **D** 25 **E** 40

19. Lygiakraščio trikampio ABC kraštinė lygi 6. Kraštinių vidurio taškai yra P, Q, R. Kam lygus paveikslėlyje užtušuotos srities PQR plotas?



A 1 **B** $9\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ **C** 2 **D** $\frac{\pi}{2} - 1$
E $6\left(\pi - \sqrt{3}\right)$

20. Paveikslėliuose pavaizduotos penkios figūros. Iš keturių iš jų galima sudėti kvadratą. Kurios figūros neprireiks?

A  **B**  **C**  **D**  **E** 

Klausimai po 5 taškus

21. Kuri iš žemiau išvardytų funkcijų tenkina sąlygą $f\big(f(x)\big) = 4x - 3$?

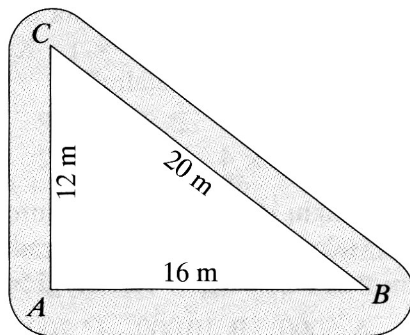
A $f(x) = 2x - 3$ **B** $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$ **C** $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$
D $f(x) = -2x + 3$ **E** $f(x) = -4x + 1$

22. Trikampio kraštinių ilgiai yra 1, a, 3, ir $1 \leqslant a \leqslant 3$. Kokį didžiausią plotą gali turėti trikampis, tenkinantis tas sąlygas?

A $\frac{3}{2}$ **B** $\frac{\sqrt{33}}{4}$ **C** $\frac{\sqrt{35}}{4}$ **D** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **E** 1

23. Trikampio aptvaro ABC kraštai yra 16 m, 20 m ir 12 m. Aptvaras aptvertas aukšta tvora, bet jame esanti žirafa, turėdama ilgą kaklą, gali skabyti žolę atstumu iki 2 m už tvoros. Kam apytiksliai lygus plotas (m^2) aptvaro išorėje, kurį gali nuėsti žirafa?

A 96 **B** 99,14 **C** 102,28 **D** 105,42 **E** 108,56



24. Tarkime, kad m — lyginis sveikasis skaičius, o n — bet kuris sveikasis skaičius. Skaičius $(m+1)^2 + n(m+1)$ visada:

A nelyginis **B** lyginis **C** lyginis tik tada, kai n lyginis
D nelyginis tik tada, kai n nelyginis **E** lyginis tik tada, kai n nelyginis

25. Atkarpoje AB taškai žymimi pagal tokią taisyklę: pirmu žingsniu žymimas atkarpos AB vidurys, o kiekvienu sekančiu žingsniu žymimas vidurys kokios nors atkarpos, kurios galai yra du gretimi anksčiau pasižymėti taškai. Kiek mažiausiai žingsnių prireiks norint pažymėti tašką, dalijantį atkarpą AB santykiu 5:11?

A 8 **B** 2 **C** 5 **D** 4 **E** 3

26. Jeigu $|x-y| = |y-z| = |z-t| = 1$, tai skaičius $x-t$ negali būti lygus:

A 0 **B** -3 **C** 3 **D** -1 **E** 1

27. Eilute surašyk vieną šalia kito 10 iš eilės einančių pirminių skaičių, pradėdamas skaičiumi 2. Gautame daugiaženkliame skaičiuje išbrauk pusę skaitmenų taip, kad naujasis skaičius būtų pats didžiausias įmanomas. Koks yra to skaičiaus penktas iš kairės skaitmuo?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 5 **E** 7

28. Su kuria skaičiaus a reikšme lygtis $|||x|-1|-a| = 4$ turi lygiai penkis sprendinius?

A -3 **B** 5 **C** Tokio skaičiaus a nėra **D** $a > 0$ **E** $a < 0$

29. Kiek sveikųjų skaičių tenkina nelygybę $x(x-100) < 1997$?

A 133 **B** 134 **C** 135 **D** 136 **E** 137

30. Kokia daugianario

$$P(x) = (x-1996)(x-1997)(x-1) + 1997$$

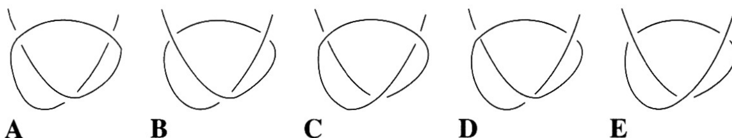
visų koeficientų suma?

A 1000 **B** $1996 \cdot 1997$ **C** 1997 **D** 0 **E** 1



Klausimai po 3 taškus

1. Kuriuo atveju traukiant abu virvutės galus užsimegs mazgas?



2. Kokį kampą sudaro valandinė ir minutinė laikrodžio rodyklės, kai jis rodo 9^{20}?
A 140° **B** 150° **C** 160° **D** 165° **E** 170°

3. Du litrai 10% druskos tirpalo sumaišyti su trimis litrais tos druskos 15% tirpalo. Koks bus druskos procentas gautame mišinyje?

A 25% **B** 5% **C** 13% **D** 12,5% **E** 12,75%

4. Kelios natūraliųjų skaičių poros $(x; y)$ tenkina dvi sąlygas: $x + y = 60$ ir DBD $(x; y) = 5$?

A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 4 **E** Kitas atsakymas

5. Žemiau nurodyti nuoseklūs samprotavimo žingsniai:
1. $x > 3$
2. $3x > 9$
3. $3x - x^2 > 9 - x^2$
4. $x(3 - x) > (3 + x)(3 - x)$
5. $x > 3 + x$
6. $0 > 3$

Kuriame perėjime padaryta klaida?

A Pereinant nuo 1 teiginio prie 2 **B** Pereinant nuo 2 prie 3 **C** Pereinant nuo 3 prie 4 **D** Pereinant nuo 4 prie 5 **E** Pereinant nuo 5 prie 6

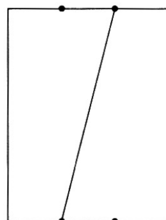
6. Lygioje vietoje pastatyti du stulpai — 3 m ir 6 m aukščio. Kiekvieno stulpo viršūnė lynu sujungta su kito stulpo pagrindu. Kuriame aukštyje (m) kertasi abu lynai?

A 1,5 **B** $\sqrt{3}$ **C** 2 **D** 2,25
E Tai priklauso nuo atstumo tarp stulpų

7. Surašyti visi natūralieji skaičiai nuo 1 iki 1000. Kiek kartų parašytas skaitmuo 4?

A 110 **B** 300 **C** 121 **D** 200 **E** 100

8. Taškai, pažymėti dviejose priešingose kvadratinės kortelės kraštinėse, dalija jas į tris lygias dalis. Kortelė sulenkta per nubrėžtą liniją. Kokią figūrą sudarys kortelės bendra abiejų dalių sritis?



A Lygiagretainį **B** Penkiakampį **C** Trapeciją
D Trikampį **E** Šešiakampį

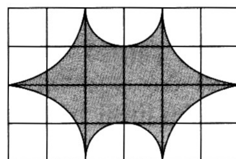
9. Koks skaičiaus

$$1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 999$$

vienetų skaitmuo?

A 1 **B** 3 **C** 5 **D** 7 **E** 9

10. Kiek procentų stačiakampio ploto sudaro užtušuotos srities plotas?



A $120 - \frac{125}{6}\pi$ **B** $200 - \frac{250}{6}\pi$ **C** $100 - \frac{125}{6}\pi$
D 47,1 **E** 52,9

Klausimai po 4 taškus

11. Nagrinėkime poras $(a; b)$ skaičių a ir b, tenkinančių sąlygą $ab < 0$. Kuri iš žemiau nurodytų lygybių teisinga kiekvienai tokiai porai?

A $|a| + a = 0$ **B** $|b| + b = 0$ **C** $|a + b| = \big||a| - |b|\big|$
D $|a + b| = |a - b|$ **E** $|a + b| = |a| + |b|$

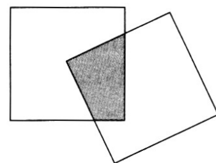
12. Septyni grybautojai kartu surinko 707 grybus. Paaiškėjo, kad visi surinko skirtingą grybų skaičių, o grybautojas, surinkęs daugiausiai grybų, turėjo jų šešiais daugiau už surinkusį mažiausiai. Kiek grybų surinko rekordininkas?

A 107 **B** 105 **C** 104 **D** 101 **E** 98

13. Plokštumoje paimti trys taškai, nesantys vienoje tiesėje. Brėžkime tiesę, nuo kurios visi trys taškai nutolę vienodai. Kiek tokių tiesių yra?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** Be galo daug

14. Kvadrato 2×2 centras sutampa su kito kvadrato 2×2 viršūne (žr. paveikslėlį). Kam lygus jų bendros dalies plotas?

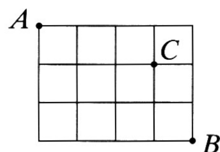


A Mažesnis už 1 **B** 1 **C** Didesnis už 1
D 1,25 **E** Neįmanoma nustatyti

15. Kiek devynraidžių žodžių galima sudaryti iš žodžio KANGOUROU (prancūziškas kengūros pavadinimas) raidžių, jeigu galimi tik žodžiai, kuriuose priebalsės ir balsės eina pakaitomis ir kiekviena raidė panaudota tiek kartų, kiek ir duotajame žodyje?

A 320 **B** 480 **C** 640 **D** 720 **E** Kitas atsakymas

16. Iš viršūnės A į viršūnę B taškas juda gardelės kraštinėmis, ir iš kiekvieno mazgo eina arba į dešinę, arba žemyn. Kam lygus santykis skaičiaus kelių, einančių per tašką C, su visų kelių skaičiumi?



A $\frac{12}{35}$ **B** $\frac{7}{33}$ **C** $\frac{3}{4}$ **D** $\frac{1}{3}$ **E** $\frac{1}{12}$

17. Kuris iš šių teiginių apie iškilojo daugiakampio įstrižainių skaičių yra teisingas?

A Jeigu įstrižainių skaičius nelyginis, tai ir kraštinių skaičius nelyginis
B Įstrižainių skaičius visada didesnis už kraštinių skaičių
C Yra iškilasis daugiakampis, turintis 35 įstrižaines
D Yra iškilasis daugiakampis, turintis 28 įstrižaines
E Jeigu iškilasis daugiakampis turi daugiau kaip 100 įstrižainių, tai jis turi ne mažiau kaip 17 kraštinių

18. Skaičiai x ir y — triženkliai. Skaičius x užrašytas skaitmenimis 1, 2, 3, skaičius y — skaitmenimis 4, 5, 6. Pasakyta, kad skaičius $x + y$ lyginis, o antras skaičiaus x skaitmuo lygus 2. Koks yra skaičių x ir y sandaugos vienetų skaitmuo?

A 2 **B** 6 **C** 5 **D** 4 **E** Negalima nustatyti vienareikšmiškai

19. Jeigu $a * b = \max\{2a, a + b\}$, tai $(2 * 3) * (3 * 2)$ lygu:

A 9 **B** 10 **C** 11 **D** 12 **E** 13

20. Du skirtingi daugianariai $f(x) = x^2 + ax + b$ ir $g(x) = x^2 + cx + d$ tenkina sąlygą $f(1) + f(10) + f(100) = g(1) + g(10) + g(100)$. Lygties $f(x) = g(x)$ sprendinys yra skaičius:

A 1 **B** 11 **C** 22 **D** 37 **E** 111

Klausimai po 5 taškus

21. Skaičių seka (a_n) apibrėžta taip: $a_0 = 4$, $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, kai $n \geqslant 1$. Narys a_{1998} lygus:

A 4 **B** $\frac{3}{2}$ **C** 6 **D** 24 **E** 2997

22. Gaublys yra rutulio, kurio spindulys R, formos. Pastačius skriestuvo kojelę į ašigalį ir taip išskėtus skriestuvą, kad atstumas tarp kojelių būtų R, nubrėžtas apskritimas. Koks nubrėžtosios lygiagretės ilgis?

A πR **B** $\frac{3\pi R}{2}$ **C** $\pi R\sqrt{3}$ **D** $2\pi R$ **E** $2\pi R\sqrt{3}$

23. Iš koordinačių pradžios pajuda taškas, kuris savo padėtį keičia taip. Pirmu žingsniu jis pajuda vienetu į dešinę, antru žingsniu — dviem vienetais į viršų, trečiu žingsniu 3 vienetais į kairę, ketvirtu žingsniu 4 vienetais žemyn, penktu — 5 vienetais į dešinę ir t. t. Kokia bus jo padėtis po 10 žingsnių?

A $(-6; 6)$ **B** $(5; 10)$ **C** $(10; 5)$ **D** $(5; -4)$ **E** $(5; 6)$

24. Į statųjį trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus 2, o apie jį apibrėžto apskritimo spindulys lygus 6,5. Kam lygus to trikampio perimetras?

A 30 **B** 36 **C** 28 **D** 31 **E** 29

25. Didžiausias toks natūralusis skaičius n, kad $n + 27$ ir $n - 62$ yra natūraliųjų skaičių kvadratai, yra:

A 598 **B** 1598 **C** 3998 **D** 1998 **E** Neegzistuoja

26. Teigiamas skaičius t, tenkinantis lygtį $t^2 = t + 1$, vadinamas aukso skaičiumi. Kam lygu t^5?

A $3t + 1$ **B** $4t + 2$ **C** $5t + 3$ **D** $6t + 4$ **E** $7t + 5$

27. Tamsiame rūsyje yra 20 stiklainių. Iš jų 8 yra su braškių, 7 — su aviečių, 5 — su gervuogių uogiene. Kiek daugiausiai galima tamsoje paimti stiklainių, kad rūsyje garantuotai liktų bent 4 stiklainiai vienos kurios nors rūšies uogienės ir bent 3 stiklainiai kitos rūšies uogienės?

A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8 **E** 9

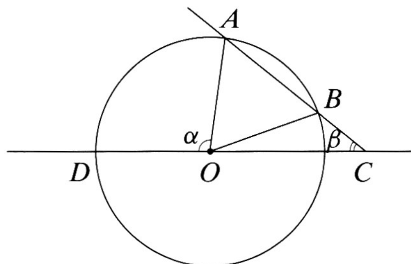
28. Kuris iš žemiau esančių skaičių dalijasi iš 7 nepriklausomai nuo to, kokie skaitmenys yra P ir Q?

A $QQPPQP$ **B** $QPQPQP$ **C** $PQPPQQ$ **D** $QPPQQP$
E $PPPQQQ$

29. Skaičiai 1, 2, 3, ..., 1996, 1997, 1998 išdėstyti ratu parašyta tvarka pagal laikrodžio rodyklę. Judame ratu pagal laikrodžio rodyklę ir nutriname kas antrą skaičių tol, kol liks tik vienas skaičius. Koks skaičius liks, jei trinti pradedame nuo vieneto?

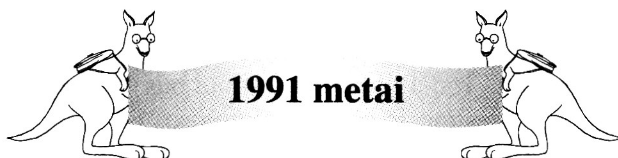
A 2 **B** 512 **C** 1024 **D** 1948 **E** 1998

30. Paveikslėlyje taškas O yra centras apskritimo, kurio spindulys r. Atkarpos BC ilgis lygus r, $\alpha = \angle DOA$, $\beta = \angle OCB$. Kampai α ir β susiję taip:



A $\alpha = 2\beta$ **B** $\alpha = \frac{5}{2}\beta$ **C** $\alpha = 3\beta$
D $\alpha = \frac{7}{2}\beta$ **E** $\alpha = 4\beta$

Atsakymai ir sprendimai



1. **B**. Žinoma, pakėlus 3 kvadratu reikia atskirti 4 vietas kableliu: $0{,}03^2 = 0{,}0009$.

2. **B**. Yra trys galimybės: arba $\angle A = \angle B$, arba $\angle A = \angle C$, arba $\angle B = \angle C$. Pirmu atveju $\angle B = 18^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 2\cdot 18^\circ = 144^\circ$. Antru atveju $\angle C = 18^\circ$, $\angle B = 180^\circ - 2 \cdot 18^\circ = 144^\circ$. Trečiu atveju $2\angle B + 18^\circ = 180^\circ$, $\angle B = 81^\circ$. Taigi iš pateiktų atsakymų tinka tik atsakymas **B**.

3. **A**. Kadangi $30\,000 = 82 \cdot 365 + 70$, tai ponui Jonui pilnų metų — 82, net ir atsižvelgus į tai, kad apie 20 metų buvo keliamieji ir jie „pasiėmė“ apie 20 dienų. Vadinasi, per artimiausią gimtadienį jam sukaks 83 metai.

4. **D**. Kadangi kraštinės proporcingos su proporcingumo koeficientu $\frac{1}{2}$, tai plotų santykis lygus $\frac{1}{4}$ arba 4 (žiūrint kurį plotą iš kurio dalysime). Vadinasi, tinka tik atsakymas **D**.

5. **D**. Kadangi $\frac{3x-4}{x-4} = 2$, tai $3x - 4 = 2x - 8$, $x = -4$.

6. **E**. Matome, kad $x \neq 0$, $y \neq 0$, $y \neq -x$. Padauginę ir skaitiklį ir vardiklį iš xy, gauname reiškinį $\frac{y-x}{x+y}$, kuris nesutampa su atsakymų **A**–**D** reiškiniais. Iš tikrųjų, pavyzdžiui, su $x = 2$, $y = 1$ mūsų reiškinys duoda reikšmę $-\frac{1}{3}$, o **A** reikšmė 0, **B** duoda reikšmę $\frac{1}{3}$, **C** — reikšmę $\frac{1}{2}$, **D** — reikšmę 3. Taigi teisingas atsakymas **E**.

7. **D**. Archimedas gyveno apie 287–212 m. pr. Kr.

8. **C**. Sakykime, kad kelias tarp Sento ir Rojalio yra s km. Tada kelionė į Rojalį trunka $\frac{s}{30}$ h, atgal — $\frac{s}{20}$ h. Visai kelionei ten ir atgal, lygiai $2s$ km, jis sugaišta $\frac{s}{30} + \frac{s}{20} = \frac{5s}{60} = \frac{s}{12}$ h, todėl jo vidutinis greitis lygus $2s : \frac{2s}{24} = 24$ km/h.

9. **A**. Ieškomieji taškai yra apskritime, kurio centras M, o spindulys 5 cm. Kiekviena atkarpa (netgi tiesė!) gali turėti daugiausiai 2 bendrus taškus su apskritimu, taigi bendras didžiausias ieškomų taškų skaičius gali būti $4 \cdot 2 = 8$. Kad tai įmanoma, įsitikinti paprasta — užtenka paimti kvadratą, kurio centras M, o kraštinė 8 cm.

10. **C**. Trikampio PQR visos trys kraštinės yra kubo sienų įstrižainės, taigi lygios. Vadinasi, $\triangle PQR$ lygiakraštis, todėl $\angle PQR = 60^\circ$.

11. **E**. Septynetų bus tiek pat, ar skaičius rašysime pradėdami 1, ar pradėdami 0 (mums tai kiek patogiau skaičiuojant). Pirmoje dešimtyje (nuo 0 iki 9) skaitmuo 7 pasitaiko vieną kartą, taip pat ir kitose pirmojo šimto dešimtyse, išskyrus 8-tąją (nuo 70 iki 79) — čia kiekvienas skaičius prasideda 7, taigi prisidės dar 10 septynetų. Todėl pirmajame šimte bus $10 \cdot 1 + 10 = 20$ septynetų. Tiek pat septynetų turėsime ir kituose šimtuose, išskyrus 8-tąjį šimtą, kuris duos dar papildomų 100 septynetų (kiekvienas skaičius nuo 700 iki 799 prasideda 7). Taigi nuo 0 iki 899 turime $20 \cdot 9 + 100 = 280$ septynetų. Nuo 900 iki 969 turime dar 7 dešimtis, taigi dar 7 septynetus, o 970, 971 ir 972 pridės dar 3 septynetus. Vadinasi, iš viso bus $280 + 7 + 3 = 290$ septynetų.

12. **B**. *I būdas.* Jūrininkų bendras amžius lygus $31 \cdot 23$. Jūrininkų ir kapitono bendras amžius lygus $32 \cdot 24$. Vadinasi, kapitono amžius lygus

$$32 \cdot 24 - 31 \cdot 23 = 24 + 31 \cdot 24 - 31 \cdot 23 = 24 + 31 = 55.$$

II būdas. Kadangi vidutinis komandos amžius su kapitonu padidėja vienetu, tai kapitonas „paskolina“ kiekvienam jūrininkui 1 metus. Taigi jo amžius yra $24 + 31 = 55$ metai.

13. **C**. Sakykime, kad šildymo išlaidos sudarė A. Tada po pirmo patobulinimo jos sudarė $0{,}8A$, po antro — $0{,}75 \cdot 0{,}8A = 0{,}6A$, po trečio — $0{,}45 \cdot 0{,}6A = 0{,}27A$. Vadinasi, po trijų patobulinimų išlaidos sudarė 27% pradinių, ir buvo sutaupyta 73% išlaidų.

14. **D**. Kadangi iš sąlygos $0 \leqslant |x| \leqslant 2$, tai $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$. Kontrapavyzdžiais nesunku įsitikinti, kad kiti atsakymai netinka: reikšmė $x = 0$ netinka atsakymams **A**, **B**, **E**, o reikšmė $x = -2$ atsakymui **C** (beje, taip pat ir **A** bei **E**).

15. **A**. Kengūros konkursas paprastai vyksta kovo mėnesio trečią ketvirtadienį. 2005 metais tai buvo kovo 17 d. Nustatykime, kada Pauliui sukako 21 metai. Sąlygoje žodis „šiandien“ reiškia 1991 metų kovo trečią ketvirtadienį, taigi reikia nustatyti, kada tai buvo.
Kadangi $365 = 52 \cdot 7 + 1$, tai 2004 m. kovo 17 buvo trečiadienį, t. y. savaitės diena per metus „pasislenka“ per vieną atgal. Per $2005 - 1991 = 14$ metų ji pasislinktų 14 dienų ir vėl būtų ketvirtadienis, bet tarp tų datų yra 4 keliamieji metai, kurie duoda dar po vieną papildomą dieną.
Taigi 1991 metų kovo 17 diena buvo sekmadienis, ketvirtadieniai buvo kovo 7, 14, 21, ir trečias ketvirtadienis (konkurso, taip pat ir Pauliaus gimimo diena) buvo kovo 21. Liko nustatyti, kuri savaitės diena buvo 1970 metų kovo 21 — būtent tą dieną gimė Paulius. Kadangi keliamieji buvo 1972, 1976, 1980, 1984, 1988 metai, tai savaitės diena nuo 1991 kovo 21 iki 1970 kovo 21 pasislinko $21 + 5 = 26$ dienomis. Tai reiškia, kad Paulius gimė šeštadienį.

16. **D**. Vienos akcijos vertė liepos gale buvo $\frac{90}{100} \cdot \frac{110}{100} \cdot 1400 = \frac{99}{100} \cdot 1400 = 1386$ frankų.

17. **C**. Jeigu kvadrato kraštinė lygi a, tai apie tą kvadratą apibrėžto skritulio spindulys lygus $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, o įbrėžto skritulio spindulys — $\frac{a}{2}$. Kadangi spindulių santykis lygus $\sqrt{2}$, tai skritulių plotų santykis lygus 2.

18. **A**. *I būdas*. Iš tikrųjų sandauga $(x-1)(x-2)\dots(x-99)(x-100)$ dar ne visai daugianaris — ji taps daugianariu atskliautus skliaustus ir sutraukus panašiuosius narius (mus ypač domina koeficientas sutraukus narius su x^{99}). Kaip atskliaučiama daugianarių (čia — dvinarių) sandauga? Užtenka paimti iš kiekvienų skliaustų po vieną dėmenį ir juos sudauginti, tik tuos dėmenis reikia pasirinkti visais galimais būdais, — po to panašiuosius narius (t. y. sandaugas) sutraukti. Kiek ir kokių dėmenų su x^{99} bus atskliautus? Aišku, kad reikės iš vienų skliaustų imti laisvąjį narį, o iš visų kitų 99 — dėmenį x. Tokių dėmenų bus 100: kai imsime laisvąjį narį iš pirmųjų skliasutų, kai iš antrųjų, ..., kai iš 100-tųjų. Gautos sandaugos bus $-1\cdot x^{99}$, $-2\cdot x^{99}$, ..., $-99\cdot x^{99}$, $-100\cdot x^{99}$, o jas susumavę gausime

$$(-1-2-\dots-99-100)x^{99} = -\frac{1+100}{2}\cdot 100x^{99} = -5050x^{99}.$$

II būdas. Sudauginkime dauginamuosius, vienodai nutolusius nuo pradžios ir nuo galo:
$P(x) = (x^2-\cdots 101x+1\cdot 100)\cdot(x^2-101x+2\cdot 99)\cdot\ldots\cdot(x^2-101x+50\cdot 51)$.
Atskliaučiant skliaustus, mūsų nebedomina laisvieji nariai — paėmus kurį nors į sandaugą, x laipsnis bus daugiausia 98. Vadinasi, ieškomasis koeficientas sutaps su skleidinio $(x^2-101x)^{50} = x^{50}(x-101)^{50}$ koeficientu prie x^{99}, kitaip sakant, su skleidinio $(x-101)^{50}$ koeficientu prie x^{49}. Žinant Niutono binomą, aišku, kad jis lygus $-50\cdot 101$. Bet nesunku jį nustatyti ir binomo nežinant — pavyzdžiui, I būdu.
Galima samprotauti ir taip. Skleidinio $(x-101)^{50}$ koeficientas prie x^{49} tas pats, kaip ir reiškinio $(x-101)^{50}-x^{50}$. Išskaidykime pastarąjį remdamiesi geometrinės progresijos sumavimo tapatybe

$$a^{50}-b^{50} = (a-b)(a^{49}+a^{48}b+\dots+ab^{48}+b^{49}).$$

Gauname

$$(x-101-x)\big((x-1)^{49}+(x-1)^{48}x+\dots+(x-1)x^{48}+x^{49}\big).$$

Antruosiuose skliaustuose vyriausias narys x^{49} yra 50 kartų, taigi jo koeficientas skleidinyje bus $-101\cdot 50 = -5050$.
III būdas. Sudauginkime iš pradžių dvejus skliaustus, tada trejus ir t. t. ir išrašinėkime tik du aukščiausius x laipsnius:

$$(x-1)(x-2) = x^2-(1+2)x+2 = x^2-(1+2)x+\cdots$$
$$(x-1)(x-2)(x-3) = \big[x^2-(1+2)x+\cdots\big](x-3) =$$
$$= x^3-(1+2)x^2-3x^2+\dots = x^3-(1+2+3)x^2+\cdots$$

Tęsdami gausime

$$\big(x^{99}-(1+2+\cdots+99)x^{98}+\cdots\big)(x-100)=$$
$$=x^{100}-(1+2+\cdots+99)x^{99}-100x^{99}+\cdots=$$
$$=x^{100}-(1+2+\cdots+99+100)x^{99}+\cdots$$

Taigi ieškomasis koeficientas lygus $-\frac{100+1}{2}\cdot 100=-5050$.

19. **B**. Kadangi $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, tai ieškoma suma lygi

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1989\cdot 1990}+\frac{1}{1990\cdot 1991}=$$
$$\Big(1-\frac{1}{2}\Big)+\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\Big)+\cdots+\Big(\frac{1}{1989}-\frac{1}{1990}\Big)+$$
$$+\Big(\frac{1}{1990}-\frac{1}{1991}\Big)=1-\frac{1}{1991}=\frac{1990}{1991}.$$

20. **B**. *I būdas*. Tegul x — Povilo amžius, y — Petro amžius. Kai Povilas buvo Petro amžiaus, tai jam buvo y metų, todėl tai buvo prieš $x-y$ metų. Tada Petrui buvo $y-(x-y)$ metų. Kita vertus, kai Petras bus Povilo amžiaus ir turės x metų (o tai bus po $x-y$ metų), tai Povilui bus $x+(x-y)$ metų. Iš sąlygos gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} x=3(2y-x),\\ (2x-y)+x=112.\end{cases}$$

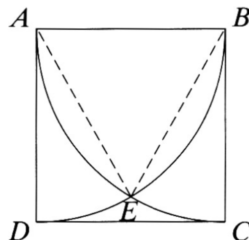
Atėmę iš pirmos lygties antrą, gauname $x=5y-112$, o šią išraišką įstatome į pirmą lygtį: $5y-112=6y-3(5y-112)$, $14y=4\cdot 112$, $7y=4\cdot 56$, $y=4\cdot 8=32$. Taigi Petrui 32 metai.

II būdas. Tegu x — Petro amžius, o r — Povilo ir Petro amžiaus skirtumas. Tada prieš r metų Petrui buvo $x-r$ metų, o Povilui x metų. Todėl $x+r=$ $=3(x-r)$. Po r metų Povilui bus $x+2r$ metų, o Petrui $x+r$ metų, todėl $x+2r+x+r=112$. Gavome lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x-4r=0,\\ 2x+3r=112.\end{cases}$$

Atėmę iš antros lygties pirmą, turime $4r+3r=112$, $r=16$, todėl $x=32$.

21. **A**. Kadangi E (žr. paveikslėlį) yra apskritimuose su centrais A ir B, tai $AE=BE=a$, kur a — kvadrato kraštinės ilgis, taip pat kiekvieno tų apskritimų spindulys. Matome, kad ieškomos srities plotas lygus dviejų skritulio 60° išpjovų plotų sumai minus lygiakraščio $\triangle AEB$ plotas, nes jis dukart įskaitytas į sumą. Todėl ieškomas plotas lygus $2\cdot\frac{1}{6}\pi a^2-\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=a^2\big(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\big)$.



22. **B**. Apskaičiuokime, kiek n-kampis turi įstrižainių. Taikykime kombinatorinę daugybos taisyklę. Pasirinkti viršūnę (vieną įstrižainės galą) galima n būdų, po to pasirinkti kitą įstrižainės galą yra $n-3$ būdai (atkrenta pasirinktoji viršūnė ir dvi jos kaimynės — sujungę viršūnę su kaimyne, gauname ne įstrižainę, o kraštinę). Vadinasi, iš viso yra $n(n-3)$ būdai pasirinkti pirmą viršūnę ir antrą viršūnę. Bet kadangi taip kiekvieną įstrižainę gauname 2 kartus (kaip AB ir kaip BA), tai iškilojo n-kampio įstrižainių skaičius x lygus $\frac{n(n-3)}{2}$.
Spręsdami lygtį $\frac{n(n-3)}{2} = x$ natūraliaisiais skaičiais, kai $x = 9, 16, 20, 54, 5$, gauname, kad tik su $x = 16$ lygtis neturi sprendinių. Iš tikrųjų, lygybėje $n(n-3) = 32$ skaičiai n ir $n-3$ yra skaičiaus $32 = 2^5$ dalikliai — dvejeto laipsniai. Bet skaičių n ir $n-3$ skirtumas nelyginis, vadinasi, vienas iš tų skaičių nelyginis, todėl lygus 1. Taigi $n-3=1$, $n=4$, bet $4 \cdot 1 \neq 32$. Kai $x = 9, 20, 54, 5$, tai atitinkamai gauname lygtis $n(n-3) = 18$, $n(n-3) = 40$, $n(n-3) = 108$, $n(n-3) = 10$. Jų nė spręsti nereikia — jas atitinkamai tenkina reikšmės $n = 6, 8, 12, 5$.
Žinoma, spėjant atsakymą užtenka imti keletą pirmųjų n reikšmių. Kai $n = 4$, tai $x = 2$; kai $n = 5$, tai $x = 5$; kai $n = 6$, tai $x = 9$; kai $n = 7$, tai $x = 14$; kai $n = 8$, tai $x = 20$. Čia jau matome, kad nėra (ir nebus) reikšmės $x = 16$.

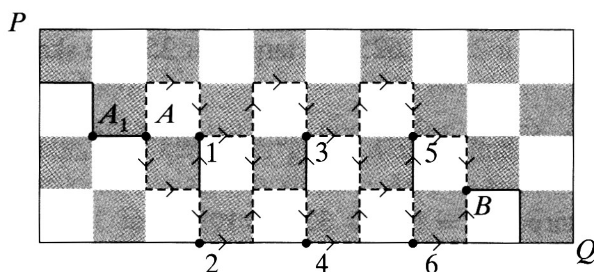
23. **B**. Nagrinėkime funkcijos f iteracijas $f, f^2, ..., f^n$. Matome, kad $x \neq 1$, bet kadangi reikia skaičiuoti ir $f(f)$, tai turi būti $f(x) \neq 1$, t. y. $x \neq 0$, ir $f(x)$ galima nagrinėti srityje $x \neq 1$, $x \neq 0$. Tada

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f^{(2)}(x) = f(f(x)) = f\Big(\frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x},$$

$$f^{(3)}(x) = f\big(f^{(2)}(x)\big) = f\Big(\frac{x-1}{x}\Big) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x.$$

Matome, kad $f^{(4)}(x) = f(x)$ srityje $R\setminus\{0, 1\}$, ir iteracijos kas trys kartojasi. Kadangi $1991 = 663 \cdot 3 + 2$, tai $f^{(1991)}(x) = \frac{x-1}{x}$, todėl $f^{(1991)}(1991) = \frac{1991-1}{1991} = \frac{1990}{1991}$.

24. **D**. Paveikslėlyje išvestos tolydžios linijos nuo P iki A ir nuo B iki Q, kurias būtinai turi praeiti skruzdėlė, judėdama trumpiausiu keliu ir laikydamasi sąlygos.

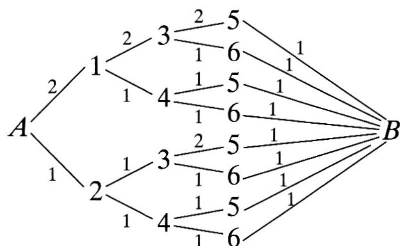


Brūkšneliais pažymėtos galimų skruzdėlės kelių atkarpos, o kitomis atkarpomis skruzdėlė judėti negali. Judėjimo kryptis pažymėta rodyklėmis. Skaičiais 1, 2, 3, 4, 5, 6 pažymėti tam tikri kontroliniai punktai. Iš sąlygos išplaukia, kad

1) užtenka nagrinėti kelią iš A iki B,

2) kiekvieną trumpiausią kelią tarp A ir B sudaro 13 atkarpų.

Žemiau pavaizduotas galimybių medis padės mums suskaičiuoti trumpiausių kelių iš A į B skaičių. Briaunose pažymėtas skaičius būdų, kuriais nepažeidžiant sąlygos galima patekti iš vieno kontrolinio punkto į kitą. Aišku, kad trumpiausią kelią tarp dviejų eilinių kontrolinių punktų sudaro keturios vienetinės atkarpos.



Dabar kelių skaičių gauname sumuodami galimybių skaičiaus atskiruose etapuose sandaugas. Jis lygus

$$2\cdot2\cdot2\cdot1+2\cdot2\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot2\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot1=$$
$$=8+4+2+2+2+1+1+1=21.$$

25. **D**. Vienetų skaitmuo skaičiaus kvadrate gali baigtis tik 0, 1, 4, 5, 6, 9. Vadinasi, ieškomieji skaičiai gali būti tik pavidalo $1{*}1$, $4{*}4$, $5{*}5$, $6{*}6$, $9{*}9$, kur vietoj žvaigždutės reikia parinkti tinkamą skaitmenį.

Skaičius $1{*}1$ yra tarp $10^2=100$ ir $15^2=225$. Taigi jis gali būti tik besibaigiančio vienetu skaičiaus kvadratas, o 11^2 tinka: $11^2=121$.

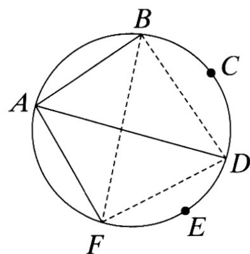
Skaičius $4{*}4$ yra tarp $20^2=400$ ir $25^2=625$ ir turi būti besibaigiančio 2 skaičiaus kvadratas. Taigi galėtų tikti tik 22^2, ir tinka: $22^2=484$.

Skaičius $5{*}5$ yra tarp $22^2=484$ ir $25^2=625$, bet tarp 22 ir 25 nėra skaičiaus, kuris baigiasi 5.

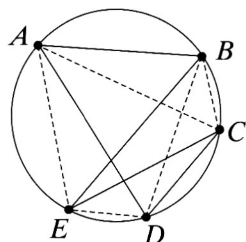
Skaičius $6{*}6$ yra tarp $24^2=576$ ir $30^2=900$, turi baigtis 6, ir 26^2 tinka: $26^2=676$.

Pagaliau, skaičius $9{*}9$ yra tarp $30^2=900$ ir $32^2=1024$, bet 31^2 baigiasi vienetu. Taigi yra 3 triženkliai palindrominiai kvadratai.

26. **B**. Įrodysime, kad ieškomas skaičius yra 6. Sakykime, kad apskritime pažymėti paeiliui einantys taškai A, B, C, D, E, F. Tašką A su likusiais jungia 5 atkarpos. Kiekviena iš jų nuspalvinta viena iš dviejų spalvų (ištisinė linija žymi vieną spalvą, brūkšninė — kitą). Tarp tų atkarpų yra bent 3 vienos spalvos, sakykime AB, AD, AF, ir tegu jų spalvą žymi ištisinė linija. Nagrinėkime trikampį BDF. Jeigu kuri nors jo kraštinė būtų ištisinė, tai gautume ištisinių kraštinių trikampį su viršūne A. O jeigu visos jo kraštinės brūkšninės, tai trikampis BDF — vienspalvis. Taigi jeigu turime 6 taškus, tai visada atsiras vienspalvis trikampis.

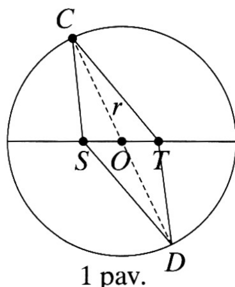


Pateikiame pavyzdį, kai turime 5 taškus, ir juos jungiančios atkarpos nuspalvintos taip, kad vienspalvio trikampio nėra. Žinoma, tas pavyzdys tinka ir atvejais $n = 3$ ir $n = 4$ (nors šiais atvejais viskas labai paprasta).

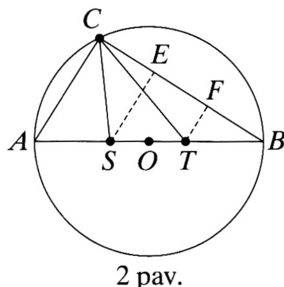


27. **E**. Kadangi $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$, tai užtenka rasti sandaugą ab. Bet $2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 1 - 2 = -1$, todėl $ab = -\frac{1}{2}$. Taigi $a^4 + b^4 = 2^2 - 2 \cdot \frac{1}{2^2} = 3{,}5$.

28. **C**. *I būdas*. Per tašką C ir apskritimo centrą O vedame skersmenį COD, o tašką D jungiame su taškais T ir S (žr. 1 pav.). Keturkampio $CTDS$ įstrižainės viena kitą dalija pusiau, $CTDS$ — lygiagretainis, ir $7^2 + 7^2 + 9^2 + 9^2 = (2r)^2 + \left(\frac{2r}{3}\right)^2$, $2(49 + 81) = 10 \cdot \left(\frac{2r}{3}\right)^2$, $\left(\frac{2r}{3}\right)^2 = 26$, $\frac{2r}{3} = \sqrt{26}$.



1 pav.



2 pav.

II būdas. Skersmens galus A ir B junkime su C (žr. 2 pav.). Per S ir T išveskime lygiagretes su tiese AC. Jų susikirtimo taškus su CB pažymėkime E ir F. Dar pažymėkime $CB = a$ ir $AC = b$. Taigi turime $BT = TS = SA = \frac{1}{3}AB$, $CS = 7$, $CT = 9$. $\angle ACB = 90^\circ$, nes remiasi į skersmenį. Pagal

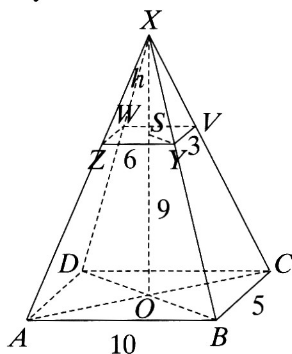
Talio teoremą $BF = FE = EC = \frac{1}{3}a$, $TF = \frac{1}{3}b$, $SE = \frac{2}{3}b$. Iš stačiųjų trikampių CFT ir CES turime

$$\left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}b\right)^2 = 9^2,$$
$$\left(\frac{1}{3}a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}b\right)^2 = 7^2.$$

Sudėję šias lygtis, gauname $\frac{5}{9}(a^2 + b^2) = 130$, t. y. $a^2 + b^2 = 9 \cdot 26$.
Taigi $ST = \frac{1}{3}AB = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{3}\sqrt{9 \cdot 26} = \sqrt{26}$.

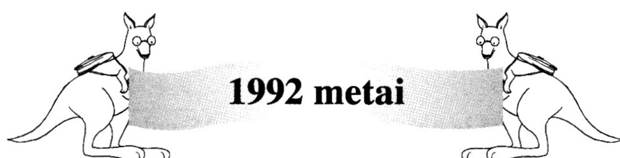
29. **B**. Sakykime, kad asmenys A, B, C, D iš pradžių sėdėjo tvarka $ABCD$. Tada jie gali susėsti devyniais būdais (išrašinėjame abėcėlės tvarka): $BADC$, $BCDA$, $BDAC$, $CADB$, $CDAB$, $CDBA$, $DABC$, $DCAB$, $DCBA$.

30. **B**. Nupjautinės piramidės tūris lygus paveikslėlyje pavaizduotų piramidžių tūrių skirtumui:



$$V = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 10(h + 9) - \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 6h = 150 + \frac{32}{3}h.$$

Raskime h, dukart naudodamiesi Talio teorema: $\frac{h}{h+9} = \frac{XY}{XB} = \frac{3}{5}$, iš kur $h = \frac{27}{2}$.
Vadinasi, $V = 150 + \frac{32}{3} \cdot \frac{27}{2} = 294$.



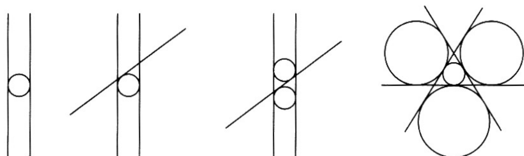
1. **D**. Žinoma, svarbiausia teisingai užsirašyti skaičių ir neapsirikti: $1099 + 1 = 1100$.

2. **B**. Jeigu panašiųjų figūrų kraštinių ilgių santykis yra k, tai jų plotų santykis yra k^2. Kadangi kraštinių santykis yra $\sqrt{3}$, tai plotas 3 kartus didesnis ir lygus 3S.

3. **A**. Galima vis lenkti pirštus ir dvigubinti dvejetą, o galima $2^5 = 32$ pakelti kvadratu: $32^2 = 1024$.

4. **A**. Kiekvienas tiesės taškas yra jos simetrijos centras, taigi simetrijos centrų ji turi be galo daug. Kitos išvardytos figūros turi tik po vieną simetrijos centrą.

5. **A**. Sakykime, kad dvi tiesės lygiagrečios. Nubrėžkime jas liečiantį apskritimą. Trečia tiesė gali būti tik jo liestinė, ir galima nubrėžti tik dar vieną reikiamą apskritimą.



Jei lygiagrečių tiesių nėra, tai jos kertasi ir sudaro trikampį. Tada tas tieses liečia trikampio įbrėžtinis ir trys pribrėžtiniai apskritimai. Vadinasi, tris tieses daugiausia gali liesti keturi apskritimai.

6. **C**. Susitikti galėjo Niutonas ir Liudvikas XIV, nes Niutonas gyveno 1643–1727 metais, o Liudvikas XIV — 1638–1715 metais. (Julijus Cezaris gyveno 101–44 pr. Kr., Karolis Didysis — 742–814, Napoleonas 1769–1821.)

7. Kadangi $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$, $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, tai teisinga nelygybė **B**, nes $x > \sqrt{2} > 1{,}4$, ir $x < \sqrt{3} < 1{,}8$. Reikšmė iš duotojo intervalo $x = 1{,}7$ rodo, kad neteisingos nelygybės **A** ir **C**, o reikšmė $x = 1{,}5$, — kad neteisingos nelygybės **D** ir **E** (žinoma, ir **C**).

8. **E**. Neteisinga tik lygybė **E**, $\sqrt{5} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Iš tikrųjų, jei ji būtų teisinga, tai būtų $5 = 2 + 2\sqrt{6} + 3$, $2\sqrt{6} = 0$, o tai ne taip. Kitos lygybės akivaizdžiai teisingos.

   Įsitikinti, kad lygybė **E** neteisinga, galima ir kitaip. Pavyzdžiui, $\sqrt{2} > 1{,}4$, $\sqrt{3} > 1{,}7$, bet $\sqrt{5} < 3$.

9. **D**. Per valandą pirmas artojas suaria $\frac{1}{7}$ lauko, antras — $\frac{1}{5}$ lauko. Kartu per valandą jie suartų $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{12}{35}$ lauko. Todėl visą lauką jie artų $\frac{35}{12}$ valandos, t. y. 2 h 55 min.
Žinoma, galima apsieiti ir be trupmenų. Per 35 valandas pirmas artojas suartų 5 tokius laukus, antras — 7 laukus. Taigi per 35 valandas kartu jie suartų 12 laukų. Vadinasi, vieną lauką jie artų $35 \cdot 60 : 12 = 35 \cdot 5 = 175$ minutes, t. y. 2 h 55 min.

10. **C**. Iš pradžių norėtųsi sakyti, kad visos padangos „nuvažiavo“ tiek pat — 20 000 km. Ir atsakymas toks yra tarp pateiktųjų...
Vis dėlto, matyt, automobilio ratai 4, automobilis nuvažiavo 20 000 km, vadinasi, jo ratai „prisuko“ kartu $4 \cdot 20\,000$ km, o padangos kartais būdavo keičiamos taip, kad visoms teko vienodas krūvis — po $4 \cdot 20\,000 : 5 = 16\,000$ km.

11. **B**. Teiginys **B** teisingas (užtenka nelygybę $x \geqslant 1$ padauginti iš x). O štai kiti teiginiai neteisingi. Teiginyje **A** užtenka paimti $x = \frac{1}{2}$, ir gauname neteisingą teiginį $\frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{2}$. Teiginyje **C** galima imti $x = -2$, $y = -1$, ir nors $x < y$, bet $(-2)^2 > (-1)^2$. Su šitomis reikšmėmis neteisingas ir teiginys **D**: nors $-2 < -1$, bet $\frac{1}{-2} > \frac{1}{-1}$. Pagaliau, teiginyje **E** imkime $x = -1$, $y = -2$. Nors $-1 > -2$, bet $(-1)^2 < (-1) \cdot (-2)$.

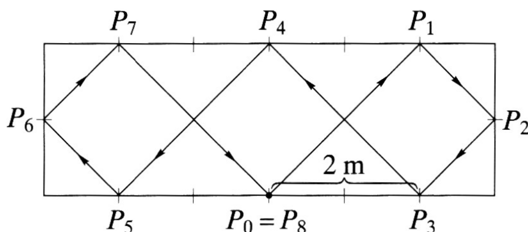
12. **B**. Licėjaus mokinių skaičių pažymėkime L, besimokančių rusų kalbos mokinių skaičių R, besimokančių prancūzų kalbos skaičių — P, nesimokančių nei vienos kalbos — N, besimokančių abiejų kalbų — A. Jeigu sudėsime N, P ir R, tai gausime visų licėjaus mokinių skaičių, padidintą tiek vienetų, kiek yra abiejų kalbų besimokančių mokinių, t. y.

$$N + P + R = L + A.$$

Bet pagal sąlygą $N = 0{,}78\,L$, $R = 0{,}14\,L$, $A = 0{,}02\,L$, taigi
$0{,}78\,L + P + 0{,}14\,L = L + 0{,}02\,L$, $P = 0{,}1\,L$.
Tai reiškia, kad prancūzų kalbos mokosi 10% mokinių.

13. **A**. Sakykime, kad buvo x valandų. Gauname lygtį $x + \frac{2}{3}x = 24$. Todėl $x = \frac{72}{5}$ val., t. y. 14^{24}.

14. **A**. Pažymėkime P_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, 8$, tašką, kuriame rutulys atsimuša i-tąjį kartą. Matome, kad aštuntas atsimušimo taškas sutampa su pradiniu tašku P_0. Todėl 59-to atsimušimo taškas sutaps su P_3 (nes $59 = 7 \cdot 8 + 3$), o P_3 nutolęs nuo pradinio taško P_0 2 metrais.



15. **C**. Kadangi $a < \frac{bc}{d}$, tai

$$N = \frac{a+c}{b+d} < \frac{\frac{bc}{d}+c}{b+d} = \frac{bc+cd}{d(b+d)} = \frac{c}{d},$$

taigi atsakymai **D** ir **E** neteisingi.
Panašiai galime „atsikratyti“ $d : d < \frac{bc}{a}$,

$$N = \frac{a+c}{b+d} > \frac{a+c}{b+\frac{bc}{a}} = \frac{a(a+c)}{b(a+c)} = \frac{a}{b},$$

taigi teisingas atsakymas **C**, o atsakymai **A** ir **B** neteisingi.

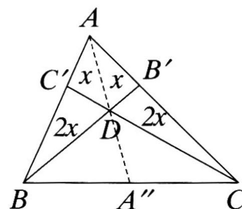
16. **B**. Kadangi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, tai $\cos^2 x = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{18}{13} \cdot \frac{8}{13} = \frac{9 \cdot 16}{13^2}$, ir $\cos x = \frac{3 \cdot 4}{13} = \frac{12}{13}$ (nes kosinusas teigiamas).

17. **C**. Skaičių

$$N = 10^{92} - 92 = 1\underbrace{000\ldots0}_{92} - 100 + 100 - 92 =$$
$$= \underbrace{99\ldots9}_{90}00 + 8 = 999\ldots908$$

sudaro 90 devynetų, nulis ir 1 aštuonetas, taigi skaitmenų suma lygi $9 \cdot 90 + 8 = 818$.

18. **A**. Pratęskime AD iki susikirtimo su BC taške A'' ir įsitikinkime, kad tai tas pats kraštinės BC vidurio taškas A'.



Pažymėkime $\triangle ADC'$ plotą x. Kadangi $\triangle BDC'$ pagrindas BC' dukart didesnis už AC', o aukštinė į juos iš D bendra, tai $\triangle BDC$ plotas lygus $2x$. Tiek $\triangle ACC'$, tiek ir $\triangle BAB'$ plotai lygūs $\frac{1}{3}$ trikampio ABC ploto S. Jeigu iš tų lygių plotų atmesime po keturkampio $AB'DC'$ plotą, gausime, kad $S_{CDB'} = S_{C'BD} = 2x$. Dabar aišku, kad $S_{AB'D} = \frac{1}{2}S_{B'CD} = x$.
Kadangi $S_{BB'A} = x + x + 2x = 4x$, tai $S = 12x$, todėl $S_{BDC} = 12x - 2x - 2x - 2x = 6x$. Bet trikampių ADB ir ADC plotai lygūs $3x$, pagrindas AD tas pats, tai ir aukštinių iš B ir C į AD ilgiai lygūs. Todėl $S_{BDA''} = S_{A''DC} = 3x$. Kadangi tų trikampių aukštinė iš D į BC bendra, tai ir jų pagrindai lygūs, o A'' — kraštinės BC vidurio taškas, $A'' = A'$.
Dabar viskas aišku: kadangi $\triangle A'DB$ ir $\triangle DAB$ plotai lygūs $(3x)$, o aukštinė iš B bendra, tai $A'D = DA$. Vadinasi, teisingas teiginys **A**, o teiginiai **B**, **C**, **D** neteisingi. Neteisingas ir teiginys **E**: anksčiau įrodėme, kad taškas D priklauso tiesei AA'.

19. **C**. Kadangi taškas (0; 6) tenkina antrą lygtį $cx - 2y + 12 = 0$, tai jis tenkina ir pirmą lygtį $3x + by + x = 0$, todėl $6b + c = 0$.
Kadangi taškas $\left(-\frac{c}{3}; 0\right)$ tenkina pirmą lygtį, tai ir $c \cdot \left(-\frac{c}{3}\right) - 2 \cdot 0 + 12 = 0$, t. y. $c^2 = 36$, $c = \pm 6$. Prisiminę lygybę $6b + c = 0$, gauname dvi poras $(b; c) : (1; -6)$ ir $(-1; 6)$.
Patikriname abi gautas poras. Pirmoji pora duoda lygtis $3x + y - 6 = 0$ ir $-6x - 2y + 12 = 0$, kurios ekvivalenčios. Antroji pora duoda lygtis $3x - y + 6 = 0$ ir $6x - 2y + 12 = 0$, kurios vėl ekvivalenčios.

20. **E**. Iš pradžių įsitikinkime, kad centriniame laukelyje yra 5. Iš tikrųjų, kadangi $a + e + i = 15$, $d + e + f = 15$, $c + e + g = 15$, tai $45 = 3e + (a + d + g) + (i + f + c) = 3e + 30$, todėl $e = 5$. Vadinasi, neteisingas atsakymas negali būti **D**. Todėl, jeigu pirmos eilutės skaičiai sveikieji, tai sveikieji ir apatinės eilutės skaičiai:
$g = 15 - c - e = 10 - c$, $h = 15 - b - e = 10 - b$, $i = 15 - e - a = 10 - a$.
Vadinasi, sveikieji ir vidurinės eilutės skaičiai, ir atsakymas **A** taip pat teisingas.
Imkimės klausimo **B**. Kadangi $a + d + g = d + e + f$, o $e = 5$, tai $a + g = 5 + f$, ir atsakymas **B** teisingas (priminsime — ieškome neteisingo atsakymo).
Atsakymas į klausimą **C** dabar paprastas:
kadangi turime $1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6$, tai greitai pavyksta sudaryti reikiamą magiškąjį kvadratą (žr. kairįjį pav.).

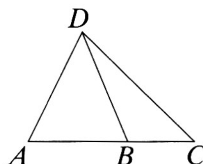
$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 7{,}5 & 5{,}5 \\ 8{,}5 & 5 & 1{,}5 \\ 4{,}5 & 2{,}5 & 8 \end{bmatrix}$$

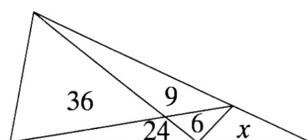
Vadinasi, neteisingas teiginys **E**. Tam įrodyti reikia sudaryti magiškąjį kvadratą, kurio vienoje įstrižainėje sveikieji skaičiai, o kitur yra nesveikųjų. Imkime, ką tik gautą lentelę, o joje prie 1, 4 ir 7 pridėkime po 0,5, o iš 3, 6, 9 atimkime po 0,5. Gauname magiškąjį kvadratą (žr. dešinįjį pav.).

21. **A**. Iš duotųjų lygčių gauname $2b = a + c$, $b^2 = ac + c$, $b^2 = ac + 2a$.
Iš antros ir trečios lygties matome, kad $c = 2a$, tada iš pirmos $b = 1{,}5a$. Įstatę šias išraiškas į antrą lygtį, turime $2{,}25a^2 = 2a^2 + 2a$, t. y. $a^2 = 8a$. Kadangi pagal sąlygą $a \neq 0$, tai $a = 8$, $b = 12$, $c = 16$. Nesirūpinome ekvivalentumu, todėl privalome gautąsias reikšmes patikrinti: $12 - 8 = 16 - 12$, $\frac{12}{8+1} = \frac{16}{12}$, $\frac{12}{8} = \frac{16+2}{12}$. Taigi $b = 12$.

22. **C**. Jeigu taškai A, B ir C yra tiesėje, o taškas D yra šalia tiesės, tai

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{AB}{BC},$$





nes tų trikampių aukštinės lygios. Dukart pritaikę šią lygybę duotojo trikampio

pagrindui, gauname proporciją $\frac{36+24}{9+6+x} = \frac{24+6}{x}$, iš kur $x = 15$.

Pastaba. Iš pradžių atsakymų eilutėje 3, 4, 15, 6, 7 atsakymas 15 atrodo kaip korektūros klaida. Taip norisi galvoti ir pasižiūrėjus į brėžinį. Bet šį kartą brėžinys padarytas netikslus sąmoningai. Kitaip sakant, net ir „Kengūros“ konkursuose neverta remtis sprendimu „iš akies“.

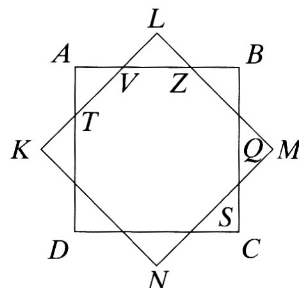
23. **B**. Žymėkime:

x — ant pirmo laido tupinčių kregždžių skaičius, y — ant antro laido tupinčių kregždžių skaičius, z — ant trečio (ir ant penkto) laido tupinčių kregždžių skaičius, t — ant ketvirto laido tupinčių kregždžių skaičius. Iš uždavinio sąlygos turime tokias lygtis:

$t - 3 = z + 3$, $z + 1 = 2(z - 1)$, $t - 4 = x + y$.

Iš antros lygties $z = 3$. Tada iš pirmos lygties $t = 9$, o trečia lygtis virsta $x + y = 5$. Kadangi pagal sąlygą nei x, nei y nelygus $z = 3$ ir tiek x, tiek y yra natūralusis, o x mažesnis už y, tai $x = 1$, $y = 4$. Taigi ant antro laido tupi 4 kregždės.

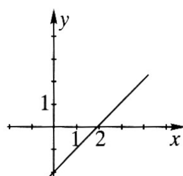
24. **D**. Vartosime paveikslėlio žymenis. Tegu $AV = VZ = ZB = AT = x$. Kadangi trikampiai LVZ ir AVT yra panašūs (pagal kampus), tai trikampis LVZ, kaip ir trikampis AVT, yra lygiašonis. Todėl pagal Pitagoro teoremą (ar kaip kitaip) $VL = \frac{x\sqrt{2}}{2}$. Kadangi $TK = VL$, tai $KL = 2VL + TV = x\sqrt{2} + x\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}$, o kvadrato $KLMN$ plotas lygus $Q = 8x^2$. Kadangi kvadrato $ABCD$ plotas lygus $(3x)^2 = 9x^2$, tai gauname $8S = 9Q$.

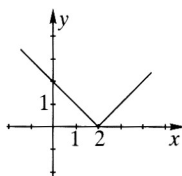


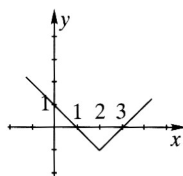
25. **A**. Pagal sąlygą $\sqrt[3]{abc} = 4$, $\sqrt[4]{abcd} = 2\sqrt{10}$. Todėl $abc = 4^3$, $abcd = 2^4 \cdot 10^2$. Vadinasi, $d = 2^4 \cdot 10^2 : 4^3 = 2^4 \cdot 2^2 \cdot 5^2 : 2^6 = 25$.

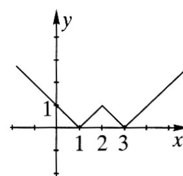
26. **B**. *I būdas.* Nusibraižykime funkcijos $y = \big||x-2|-1\big|$ grafiką. Funkcijos $y = |f(x)|$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko simetriškai atspindėjus ašies Ox atžvilgiu grafiko dalis, esančias po ašimi Ox, ir nekeičiant grafiko dalių, esančių virš ašies Ox.

Pavaizduokime funkcijos $y = \big||x - 2| - 1\big|$ grafiko brėžimo etapus.

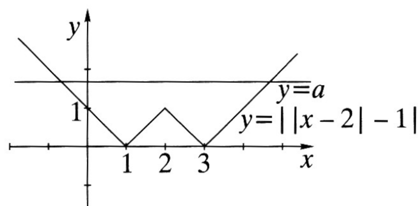








Jeigu dabar išvesime tiesę $y = a$, tai duotosios lygties sprendinių skaičius bus bendrų abiejų grafikų taškų skaičius — kitais žodžiais, skaičius tų argumento reikšmių, su kuriomis funkcija $y = \big||x-2|-1\big|$ įgyja reikšmę a.



Matome, kad tik kai $a = 1$, grafikai turės lygiai 3 bendrus taškus, kai $x = 0$, kai $x = 2$, kai $x = 4$.

II būdas. Tiesiog išspręskime lygtį su kiekvienu a. Tada ir nustatysime, su kuriomis a reikšmėmis lygtis turi 3 sprendinius.

Jeigu $a < 0$, tai lygtis $\big||x-2|-1\big| = a$ sprendinių neturi. Jeigu $a = 0$, tai gauname $|x-2|-1 = 0$, $|x-2| = 1$, $x-2 = \pm 1$, $x = 1$ arba $x = 3$.

Jeigu $a > 0$, tai $|x-2| = 1+a$ arba $|x-2| = 1-a$. Pirma lygtis duoda sprendinius $x = 2 \pm (1+a)$, t. y. $x = 3+a$, $x = 1-a$. O štai antra lygtis $|x-2| = 1-a$ su $a > 1$ sprendinių neturi; kai $a = 1$, ji turi vieną sprendinį $x = 2$; kai $0 < a < 1$, ji turi du sprendinius: $x-2 = \pm(1-a)$, t. y. $x = 3-a$ ir $x = 1+a$, nesutampančius su $3+a$ ir $1-a$.

Taigi, kai $a < 0$, tai sprendinių nėra; kai $a = 0$, tai sprendiniai du: 1, 3; kai $0 < a < 1$, tai sprendiniai keturi: $1-a$, $1+a$, $3-a$, $3+a$; kai $a = 1$, tai sprendiniai trys: 0, 2, 4; kai $a > 1$, tai sprendiniai du: $3+a$, $1-a$.

III būdas. Pasistenkime sprendimą sutrumpinti kiek įmanoma. Jeigu $a < 0$, tai sprendinių nėra. Jei $a = 0$, tai $|x-2| = 1$, ir turėsime du sprendinius. Kai $a > 0$, tai lygtis suskyla į dvi: $|x-2| = 1+a$ ir $|x-2| = 1-a$. Jų sprendiniai nesutampa, nes $1+a \neq 1-a$. Pirma lygtis visada turi du sprendinius, todėl sprendinių bus trys, kai antra lygtis turės vieną sprendinį, t. y. kai $a = 1$.

27. D. Įdomu, kad sprendžiant uždavinį prireikia tik sumos kvadrato formulės. Kadangi $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, tai $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$. Bet $x > 0$, todėl $x + \frac{1}{x} = 3$. Daugindami gauname:

$$7 \cdot 3 = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3.$$

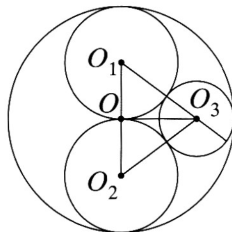
$$\text{Taigi} \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = 7 \cdot 3 - 3 = 18.$$

Vėl dauginame: $18 \cdot 7 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x}$, taigi $x^5 + \frac{1}{x^5} = 18 \cdot 7 - 3 = 123$.

Suprantama, galima apsieiti ir be sumos kvadrato formulės. Kadangi $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x} \cdot x + x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9$, tai $x + \frac{1}{x} = 3$.

28. **A**. Apskritimų, einančių per O, centrus pažymėkime O_1 ir O_2, trečiojo apskritimo centrą — O_3. Raide A pažymėkime apskritimų O ir O_1 bendrą lietimosi tašką. Taške A apskritimai O ir O_1 turi bendrą liestinę t. Kadangi $O_1A\perp t$ ir $OA\perp t$ kaip spinduliai lietimosi taške, tai taškai O, O_1 ir A priklauso vienai tiesei. Kitaip sakant, taškas O_1 priklauso atkarpai OA. Bet $OA = 2$ yra apskritimo O_1 skersmuo, taigi jo spindulys lygus 1. Lygiai taip pat apskritimo O_2 spindulys lygus 1.

Nagrinėkime trikampį $O_1O_2O_3$. Apskritimo O_3 spindulį pažymėkime r. Aišku, kad $O_1O_2 = 2$, $O_1O_3 = 1 + r$, $O_2O_3 = 1 + r$. Lygiašonio trikampio $O_1O_3O_2$ pusiaukraštinė O_3O yra ir jo aukštinė. Kadangi apskritimai O ir O_3 liečiasi iš vidaus, tai $O_3O = 2-r$. Pagal Pitagoro toeremą $OO_3^2 + OO_1^2 = O_1O_3^2$, $(2-r)^2 + 1 = (1+r)^2$, $6r = 4$. Vadinasi, ieškomasis spindulio ilgis yra $r = \frac{2}{3}$.



29. **D**. *I būdas.* Įsitikinkime, kad teiginiai **A**, **B**, **C** ir **E** klaidingi. Iš apibrėžimo matome, kad trikampiai yra skaičiai $t = 1 + 2 + \cdots + (m-1) + m = \frac{m(m+1)}{2}$. Pirmieji keturi trikampiai skaičiai nurodyti sąlygoje: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$, $3 = \frac{2\cdot 3}{2}$, $6 = \frac{3\cdot 4}{2}$, $10 = \frac{4\cdot 5}{2}$. Eikime toliau: $\frac{5\cdot 6}{2} = 15$, $\frac{6\cdot 7}{2} = 21$, $\frac{7\cdot 8}{2} = 28$, $\frac{8\cdot 9}{2} = 36$. Štai ir radome kvadratą. Taigi natūraliojo skaičiaus 6 kvadratas $K = 36$ yra trikampis skaičius, — teiginys **A** neteisingas.

Teiginys **B** neteisingas, nes jau 1 yra kvadratas ir kartu trikampis skaičius. Beje, nepadėtų ir išlyga dėl vieneto: „Išskyrus $K = 1$, K turi būti lyginio skaičiaus kvadratas“. Kantrybės reikia daugiau, bet tęsdami randame ir kitą nelyginį kvadratą — trikampį skaičių: $\frac{49\cdot 50}{2} = 25\cdot 49$.

Teiginys **C** taip pat neteisingas — tai įrodo pirmasis trikampis skaičius 1 (žinoma, ir skaičius $25\cdot 49$). Neteisingas ir teiginys **E** — tai įrodo skaičius $25\cdot 49$.

Įsitikinkime, kad teiginys **D** teisingas.

Sakykime, kad natūraliojo skaičiaus kvadratas K yra trikampis skaičius. Reikia įrodyti, kad $8K+1$ taip pat yra kvadratas. Kadangi trikampį skaičių K galima išreikšti kaip $K = \frac{m(m+1)}{2}$, tai $8K+1 = 4m(m+1)+1 = 4m^2+4m+1 = (2m+1)^2$. Beje, fakto, kad K yra kvadratas, nė neprireikė — kitaip sakant, kad ir koks būtų trikampis skaičius t, skaičius $8t+1$ yra kvadratas.

Atvirkščiai, sakykime, kad turime tokį natūraliojo skaičiaus kvadratą K, kad $8K+1$ taip pat kvadratas. Įsitikinkime, kad K — trikampis skaičius. Kadangi $8K+1$ nelyginis, tai jis yra nelyginio skaičiaus kvadratas:

$$8K + 1 = (2n-1)^2.$$

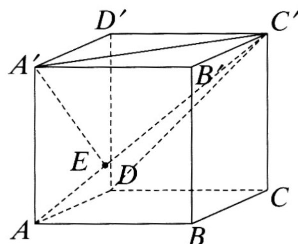
Todėl $8K = (2n-1)^2 - 1 = 2n(2n-2)$, $K = \frac{(n-1)n}{2}$, o tai ir reiškia, kad K yra trikampis skaičius.

II būdas. Kad teiginiai **A**, **B**, **C**, **E** klaidingi, įsitikinome perranka. Jos galima išvengti remiantis trikampių skaičių išraiška $t = \frac{m(m+1)}{2}$. Pagalvokime, kada t gali būti kvadratas, t. y. su kuriais m bus $m(m+1) = 2n^2$. Įsivaizduokime, kad n išskaidėme pirminiais daugikliais. Tada visi jie, išskyrus 2, įeina į sandaugą lyginiu laipsniu. Kadangi m ir $m + 1$ neturi bendrų daliklių (kitaip jie būtų tam tikro skaičiaus kartotiniai, taigi skirtųsi daugiau nei vienetu), tai vienas iš dauginamųjų yra lyginis, o kitas — nelyginis.

Tas nelyginis dauginamasis sudarytas iš nelyginių pirminių kvadratų, taigi yra nelyginio skaičiaus kvadratas. Vadinasi, nustatėme, kad trikampis skaičius $t = \frac{m(m+1)}{2}$ gali būti kvadratas tik tada, kai vienas iš dauginamųjų m ir $m + 1$ yra nelyginio skaičiaus kvadratas, o kitas, vienetu mažesnis ar didesnis, yra dvigubas kvadratas.

Žodžiu, užtenka tikrinti nelyginius kvadratus. Imame $1^2 = 1$, tada $1 + 1 = 2 \cdot 1^2$, taigi $\frac{1\cdot 2}{2} = 1^2$ — trikampis skaičius kvadratas. Tikriname $3^2 = 9$, tada $9 - 1 = 8 = 2 \cdot 2^2$, taigi $\frac{9\cdot 8}{2} = 36$ — trikampis kvadratas. Imame $5^2 = 25$, — nei $24 \cdot 2$, nei $26 \cdot 2$ nėra kvadratai. Imame $7^2 = 49$, tada $48 : 2$ nekvadratas, bet $50 : 2$ — kvadratas, taigi $\frac{49\cdot 50}{2} = 25 \cdot 49$, — trikampis kvadratas. Dabar jau vien tik pavyzdys $25 \cdot 49$ rodo, kad teiginiai **A**, **B**, **C**, **E** yra neteisingi, ir galima drąsiai rinktis atsakymą **D**.

30. **B**. Nagrinėkime tokį kubą $ABCDA'B'C'D'$. Jo briauna lygi $\sqrt{3}$, tai įstrižainė lygi 3. Projektuojant viršūnes į įstrižainę AC', viršūnės A ir C' lieka savo vietose. Išveskime plokštumą $A'BD$ per tris sienų įstrižaines BD, DA', $A'B$. Iš simetrijos aišku, kad įstrižainė AC' statmena plokštumai $A'BD$, o jų susikirtimo taškas E yra lygiakraščio trikampio $A'BD$ centras. Kadangi $AC' \perp A'E$, tai taškas E yra viršūnės A' (taip pat ir viršūnių B ir D) projekcija į AC'. Be to, aišku, kad jis yra arčiau nuo A negu nuo kubo centras O — įstrižainės AC' ir plokštumos $BDD'C'$ susikirtimo taškas.



Analogiškai kitų trijų viršūnių projekcijos taškas F bus taškui E simetriškas taškas. Taigi viršūnių projekcijų taškai įstrižainę dalija į 3 dalis.

Beje, nesunku apskaičiuoti ir AE ilgį. Stačiojo trikampio $AA'C$ kraštinės $AA' = \sqrt{3}$, $A'C' = \sqrt{6}$, $AC' = 3$, o E — statmens į įžambinę pagrindas, todėl $AA'^2 = AE \cdot AC'$, $3 = AE \cdot 3$, $AE = 1$. Vadinasi, viršūnių projekcijos įstrižainę dalija į 3 lygias dalis.



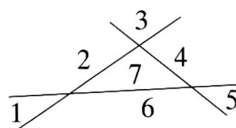
1. **D**. Suprantama, tai yra $1000 : 2 : 2 = 500 : 2 = 250$.

2. **D**. Kadangi paimtas kas antras skaičius nuo 1 iki 100, tai skaičių yra 50, o porų — 25. Kiekviena pora duoda skirtumą 2, taigi

$$(99 - 97) + (95 - 93) + \cdots + (3 - 1) = 25 \cdot 2 = 50.$$

3. **D**. Kadangi $\left(1^2\right)^3 = 1$, $\left(2^1\right)^3 = 8$, $\left(2^3\right)^1 = 8$, $\left(3^1\right)^2 = 9$, $\left(1^3\right)^2 = 1$, tai didžiausias yra skaičius **D**.

4. **E**. Iš paveikslėlio aišku, kad gauname 7 sritis.



5. **A**. Po 8 metų vaikų amžių suma bus 58, todėl dabar ji lygi $58 - 8 - 8 = 42$ metams. Kadangi sūnus 4 metais vyresnis už dukterį, tai jam yra $(42 + 4) : 2 = 23$ metai.

6. **C**. Akivaizdu, kad funkcija didėja, kai $x > 0$. Kiti teiginiai neteisingi.
A Ji nėra lyginė, nes $f(-2) = 1$, $f(2) = 9$, taigi $f(-2) \neq f(2)$.
B Ji nėra nelyginė, nes $f(-1) = 0$, o $f(1) = 4$, taigi $f(-1) \neq -f(1)$.
D Kadangi funkcija didėja, kai $x > 0$, tai ji turėtų didėti visur, o taip nėra — pavyzdžiui, $f(-4) = 9$, o $f(-1) = 0$, taigi $f(-4) > f(-1)$.
E Kadangi $f(0) = 1$, o $f(-1) = 0$, tai ji tikrai neįgyja mažiausios reikšmės taške $x = 0$.

7. **E**. Kadangi trajektorijos apskritimo spindulys lygus $150 \cdot 10^6$ km, tai per metus Žemė nuskrieja $2\pi \cdot 150 \cdot 10^6$ km. Vadinasi, per parą ji nuskrieja maždaug 365 kartus mažiau, t. y. $\frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{365}$ km, o per sekundę — dar 86 400 kartų mažiau (1 para = 24 valandos = $24 \cdot 60$ minučių = $24 \cdot 60 \cdot 60$ sekundžių):

$$\frac{2\pi \cdot 150 \cdot 10^6}{365 \cdot 86\,400} \text{ km} = \frac{2\pi \cdot 15 \cdot 10^4}{73 \cdot 432} \text{ km}.$$

Viena vertus, tai mažiau nei

$$\frac{63 \cdot 15 \cdot 10^3}{70 \cdot 430} = \frac{9 \cdot 15 \cdot 10}{43} < \frac{9 \cdot 15 \cdot 10}{40} < 34 \text{ km}.$$

Kita vertus, tai daugiau nei

$$\frac{6 \cdot 15 \cdot 10^4}{75 \cdot 450} = \frac{6 \cdot 10^3}{75 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 10^3}{75} = \frac{8 \cdot 10^3}{300} = \frac{80}{3} > 26\,\text{km}.$$

Taigi tinka tik atsakymas **E**.
Beje, galima skaičiuoti ir tiksliau, bet be skaičiuoklio tai užimtų daug laiko.

8. **D**. Intervalas $[0; 1]$ įeina į intervalą $(-3; 1]$, todėl užtenka sujungti intervalus $[-5; -2]$ ir $(-3; 1]$. Kadangi $(-3; 1] = (-3; -2] + (-2; 1]$, o intervalas $(-3; -2]$ įeina į intervalą $[-5; -2]$, tai užtenka sujungti intervalus $[-5; -2]$ ir $(-2; 1]$. Gauname $[-5; 1]$.

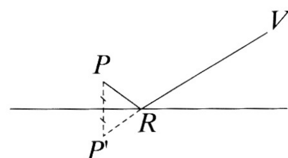
9. **D**. Kadangi sekmadienis lyginėmis savaitės dienomis kartojasi kas 14 dienų, tai sekmadienių lyginės dienos buvo 2, 16, 30 (jei pirmas lyginis sekmadienis būtų 4 dieną ar vėliau, tai du lyginiai sekmadieniai nebetilptų). Kadangi 16 diena buvo sekmadienis, tai 20 diena buvo ketvirtadienis.

10. **D**. Ž. Dalamberas (Jean Le Rond D'Alembert) gyveno 1717–1783 metais.

11. **A**. Bus sunaudota $10 \cdot 1{,}5 + 10 \cdot 2{,}5 = 40$ minučių laiko spręsti 3 taškų ir 4 taškų klausimams. Vadinasi, 5 taškų klausimams liks $75 - 40 = 35$ minutės, o kiekvienam tokiam klausimui $35 : 10 = 3{,}5$ minutės.

12. **D**. Atstumai tarp taškų lygūs $\sqrt{(5-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ ir $2\sqrt{10}$. Vadinasi, jie nėra vienoje tiesėje, o kadangi $(2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{10})^2$, tai tas trikampis statusis lygiašonis.

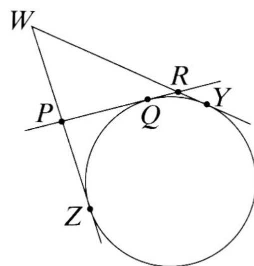
13. **B**. Maršruto PRV ilgis yra lygus laužtės $P'RV$ ilgiui, kur P' yra taškas, simetriškas taškui P upės atžvilgiu. Laužtė $P'RV$ trumpiausia, kai taškai P', R ir V yra vienoje tiesėje. Todėl atsakyme **B** pavaizduotas maršrutas trumpiausias.



14. **E**. Veiksmai **A**, **B**, **C** ir **D** įmanomi visada, o štai dalijant veiksme **E** reikia tikrinti, ar daliklis $x - y - z$ nelygus nuliui, — o būtent taip ir yra. Todėl dalyti iš $x - y - z$ nebuvo galima.

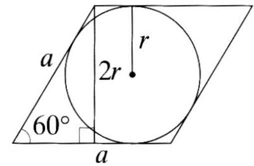
15. **B**. Pagrindo spindulio ilgį pasižymėkime r. Tada pagal sąlygą $3\pi r^2 = 2\pi r^2 + 3 \cdot 2\pi r$, $\pi r^2 = 6\pi r$, $r^2 = 6r$. Kadangi $r \neq 0$, tai $r = 6\,(\text{m})$.

16. **D**. Trikampio WPR perimetras lygus $WP + PR + WR$. Kadangi $WZ = WY$, $RY = RQ$ ir $PQ = PZ$, tai $WP + PR + WR = WP + PQ + QR + WR = (WP + PZ) + (WR + RY) = WZ + WZ = 40$.



17. **C**. Pliažo sluoksnio tūris lygus $50 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 1 = 10^5\,\text{m}^3 = 10^{14}\,\text{mm}^3$. Vadinasi, pliaže yra 10^{15} smiltelių.

18. **A**. Į rombą įbrėžto apskritimo spindulio ilgį pažymėkime r. Kadangi $2r$ yra rombo aukštinė, tai $2r = a\sin 60^\circ$, taigi $r = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vadinasi, ritinio tūris lygus $V = \pi r^2 h = \pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 \cdot 3a = \frac{9\pi a^3}{16}$.



19. **D**. Kadangi $\sqrt{x^2} = x$, kai $x \geqslant 0$, tai $u = \sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} =$

$$= \sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} + \sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b} = 2\sqrt{a}.$$

20. **B**. Kadangi tinklo ilgį prašoma nustatyti tik apytiksliai, tai natūralu laikyti, kad 30-kampio (kaip ir kiekvieno n-kampio, kai n pakankamai didelis) perimetras maždaug lygus apibrėžtinio apskritimo ilgiui. Todėl visų 30-kampių perimetrų suma maždaug lygi $2\pi(3 + \cdots + 18) = 2\pi \cdot \frac{3+18}{2} \cdot 38 = 2\pi \cdot 21 \cdot 19 =$ $= 2\pi \cdot 399$ (cm) ≈ 25 m.

21. **D**. Traukinio greitį pasižymėkime v km/h, o ieškomą trasos ilgį s km. Pagal sąlygą

$$\frac{s}{v} - \frac{s}{v+10} = \frac{2}{3}, \quad \frac{s}{v-10} - \frac{s}{v} = 1.$$

Pasirodo, kad kvadratinės lygties spręsti čia nereikia. Perrašome lygtis taip:

$$\frac{10s}{v(v+10)} = \frac{2}{3}, \quad \frac{10s}{(v-10)v} = 1.$$

Padaliję pirmą lygtį iš antros, gauname $\frac{v-10}{v+10} = \frac{2}{3}$, $3v - 30 = 2v + 20$, $v = 50$. Vadinasi, $\frac{10s}{40 \cdot 50} = 1$, $s = 200$.

Vertėjo pastaba. Įdomu, kad panašius uždavinius galima spręsti beveik be lygčių — na, nebent prireikia pirmojo laipsnio lygtelės.

Sakykime, kad kartu paleidžiame tris traukinius — Normalųjį, Greitąjį ir Lėtąjį, atitinkančius sąlygą, t. y. Greitasis greitesnis už Normalųjį 10 km/h, o trasą nuvažiuoja $\frac{2}{3}$ h greičiau, o už Lėtąjį greitesnis 20 km/h, ir trasą nuvažiuoja 1 h greičiau. Pažymėkime t laiką, per kurį Greitasis įveikia trasą. Kadangi per 1 h Normalusis nuo jo atsilieka 10 kilometrų, tai per t valandų jis atsiliks $10t$ kilometrų. Kitaip sakant, jam reikės dar važiuoti $10t$ kilometrų, ir jis tai padarys per $\frac{2}{3}$ valandos. Tai reiškia, kad Normaliojo greitis yra $10t : \frac{2}{3} = 15t$ kilometrų per valandą.

Lygiai taip pat Lėtasis nuo Greitojo per 1 valandą atsilieka 20 km, todėl per t valandų atsiliks $20t$ kilometrų. Šiuos jis įveiks per $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ valandos, todėl jo greitis $20t : \frac{5}{3} = 12t$ kilometrų per valandą.

Bet Normaliojo ir Lėtojo greičiai skiriasi 10 km/h, todėl

$$15t - 12t = 10, \quad 3t = 10, \quad t = \frac{10}{3}.$$

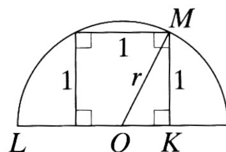
Vadinasi, Normaliojo greitis yra 50 km/h, Lėtojo 40 km/h, Greitojo 60 km/h. Kadangi Greitasis trasą įveikė per $\frac{10}{3}$ valandos, tai trasos ilgis yra $60 \cdot \frac{10}{3} = 200$ km.

22. **B**. Skaičių $\rho = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ vadiname *aukso skaičiumi*. Jis reiškia ilgį atkarpos, tenkinančios vadinamąją aukso pjūvio sąlygą, t. y. ilgį tokios atkarpos AB, esančios vienetinėje atkarpoje AC, kad

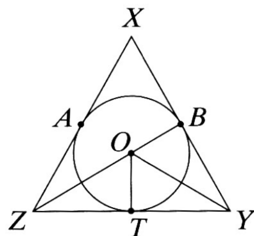
$$\frac{AB}{AC} = \frac{CB}{AB}.$$

Pažymėjus $AB = x$, ši sąlyga virsta lygtimi $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$, $x^2 + x - 1 = 0$, iš kur $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Įrodysime, kad kituose siūlomuose atsakymuose ieškomasis x yra lygus $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

A Lygties $x^2 - x - 1 = 0$ teigiamasis sprendinys yra $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
C Užtušuotas plotas lygus $x(x-1)$. Vadinasi, ieškomasis x tenkina lygtį $x^2 - x = 1$, t. y. tą pačią lygtį kaip ir atveju **A**.
D Sąlygos antrame paveikslėlyje stačiakampio įstrižainė lygi $\sqrt{5}$, jos pusė lygi $\frac{\sqrt{5}}{2}$, todėl $AB = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.
E Kadangi $OK = \frac{1}{2}$, $KM = 1$ (žr. pav.), tai spindulio ilgis lygus $OM = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Bet OL taip pat spindulys, taigi $KL = KO + OL = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



23. **D**. Aišku, kad $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$. Remiantis lanko ilgio formule $l = \alpha r$, $1 = \frac{2\pi}{3} \cdot r$, $r = \frac{3}{2\pi}$. Dabar $TY = \frac{3}{2\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$, $ZY = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$, o perimetras $3ZY = \frac{9\sqrt{3}}{\pi}$.



Žinoma, kadangi $OY = 2OT$, tai TY galima rasti ir pagal Pitagoro teoremą.

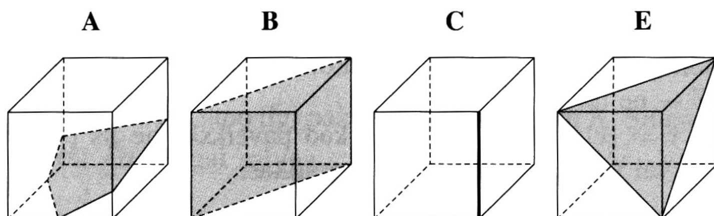
24. **B**. Remkimės aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe: $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Kadangi $a + b = 1$, tai $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}$, taigi $ab \leqslant \frac{1}{4}$. Todėl (kai $a + b = 1$) $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) = 1 + \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{ab} = 1 + \frac{2}{ab} \geqslant 9$, ir su $a = b = \frac{1}{2}$ gauname $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b}) = 9$.
Vadinasi, ieškomoji reikšmė yra $k = 9$.

25. **A**. (Plg. 1991 m. 28 uždavinio sprendimą knygelėje „Kadetas", psl. 45.) Bet kurio iškilojo n-kampio įstrižainių skaičius yra $\frac{n(n-3)}{2}$. Iš sąlygos gauname lygtį $\frac{n(n-3)}{2} = 119$, taigi $n = 17$.

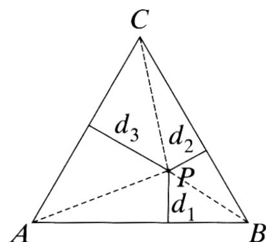
26. **A**. Pažymėkime: x — 5% tirpalo masė (kilogramais), y — 12% tirpalo masė. Iš sąlygos gauname lygtį $0{,}05x + 0{,}12y = 0{,}09(x + y)$, iš čia $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$.

27. **A**. Funkcijos $y = \frac{1}{\sin x}$ $(x > 0)$ grafiką vaizduoja kreivė A. Be kita ko:
1° Funkcija $\frac{1}{\sin x}$ iškila intervale $(0; \pi)$.
2° $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.
3° $\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{\sin x} = +\infty$, $\lim_{x\to \pi-0} \frac{1}{\sin x} = +\infty$.
Kitos kreivės tokių savybių neturi.

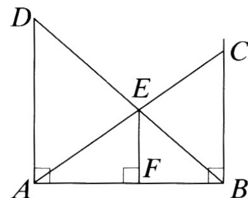
28. **D**. Atitinkami kubo pjūviai pavaizduoti paveikslėliuose.



29. **C**. Tegu P — lygiakraščio trikampio ABC vidaus taškas. To trikampio kraštinės ilgį pažymėkime a, o taško P atstumus iki kraštinių AB, BC, CA — atitinkamai d_1, d_2 ir d_3. Turime $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BCP} + S_{\triangle CAP}$, iš kur $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}ad_1 + \frac{1}{2}ad_2 + \frac{1}{2}ad_3$. Vadinasi, $d_1 + d_2 + {}$ ${}+ d_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Taigi bet kurio lygiakraščio trikampio taško atstumų iki kraštinių suma yra pastovi ir lygi aukštinei.

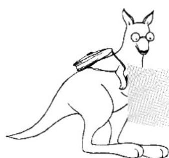


30. **A**. Naudokimės paveikslėlio žymenimis. Duota, kad $AB = 6$, $EF = 3$, $AC = 8$. Iš trikampio ABC pagal Pitagoro teoremą $BC = 2\sqrt{7}$. Remiantis Talio teorema,

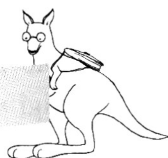


$$\frac{AF}{AB} = \frac{EF}{BC} \quad \text{ir} \quad \frac{AB}{FB} = \frac{AD}{EF}.$$

Todėl $AF = \frac{9}{\sqrt{7}}$, o kadangi $FB = AB - AF$, tai $FB = 6 - \frac{9}{\sqrt{7}}$.
$AD = \frac{6\sqrt{7}}{2\sqrt{7}-3}$.
Remdamiesi Pitagoro teorema, iš $\triangle BAD$ randame kopėčių ilgį:
$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{12\sqrt{11-3\sqrt{7}}}{2\sqrt{7}-3}$.



1994 metai



1. A. Trikampių yra tiek, kiek yra būdų pasirinkti tris taškus iš penkių, t. y. $C_5^3 = \frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$.
Nesunku būtų skaičių rasti ir nežinant kombinatorikos formulių. Pasirinkti 3 taškus iš 5 — tai tas pat, kas atmesti 2 taškus iš 5. Tai galima padaryti sunumeravus taškus skaičiais nuo 1 iki 5 ir atmetus viršūnių poras 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45. Taigi iš viso yra 10 tokių trikampių.

2. C. Jeigu net formaliai reikalautume, kad $f(0) = 1$ ir $f(1) = 0$, tai liktų tik funkcijos **C** ir **E**. Iš jų pasirinkti **C** paprasta: iš grafiko matome, kad su $x > 1$ $f(x)$ didėja (o funkcija **E** ne tokia); arba — matome, kad $f(x)$ įgyja reikšmių, didesnių už 1 (o **E** — ne tokia); ir t. t.
Žinoma, prisiminę $y = |x|$ grafiką, matome, kad paveikslėlyje jis pastumtas per 1 į dešinę, todėl tai funkcijos $y = |x - 1|$ grafikas.

3. E. Nesunku pastebėti, kad $999 < 99^9 < (9^9)^9 = 9^{81} < 9^{99} < 9^{9^9}$. Pastaroji nelygybė aiški palyginus rodiklius: $9^9 > 9^3 = 729 > 99$.

4. E. Bendrą daugianarių šaknį pažymėkime x_0. Tada gauname lygybes $x_0^2 + px_0 + q = 0$, $x_0^2 + qx_0 + p = 0$. Atėmę jas vieną iš kitos, turime $(p-q)x_0 + q - p = 0$, iš čia $(p-q)(x_0-1) = 0$. Vadinasi, bendroji šaknis $x_0 = 1$, nes $p \neq q$. Todėl iš bet kurios lygties gauname $1 + p + q = 0$, taigi $p + q = -1$. Renkamės atsakymą **E**.
Vertėjo pastaba. Kyla keli klausimai: o gal tinka ir kiti atsakymai? Atsakymai **A** ir **B**, aišku, netinka. Bet ar negali būti teisingas atsakymas **C**, kai $pq = p + q = -1$? Pasirodo, taip: jeigu išspręstume pastarąją sistemą, gautume $p = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $q = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ (arba atvirkščiai: $p = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$). Dabar uždavinio sąlygos išpildytos: $p \neq q$, o trinariai $x^2 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}x - \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ir $x^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ tikrai turi bendrą šaknį $x = 1$.
Panašiai tinka ir atsakymas **D**. Jeigu $1 - p = -1$, tai $p = 2$, tada $q = -3$. Su šitomis p ir q reikšmėmis trinariai $x^2 + 2x - 3$ ir $x^2 - 3x + 2$ turi bendrą šaknį $x_0 = 1$, o $p \neq q$.
Paaiškinsime, kur čia slypi problema. Įsivaizduokite, kad aš „netyčia" paimu trinarius $x^2 + 2x - 3$ ir $x^2 - 3x + 2$. Matau, kad jie turi bendrą šaknį $x_0 = 1$, o $p \neq q$. Kadangi $p = 2$, $q = -3$, tai pastebime, kad $1 - p = -1$, todėl renkuosi atsakymą **D** — už jo teisingumą atsako *Kengūros* konkurso taisyklės. Deja — tinka, pavyzdžiui, ir atsakymas **E**.
Vadinasi, uždavinio sąlygą reikia taisyti (beje, žodis daugianaris čia visai tinka: ko gero, trinaris — tik kai 3 nariai, o daugianaris — kai ir 4, ir 3, ir 2 nariai, ir kai 1 narys). Taisyti galima, pavyzdžiui, taip:

Daugianariai x^2+px+q ir x^2+qx+p turi po dvi skirtingas šaknis, iš kurių viena bendra abiem daugianariams. Tada $p+q$ lygu:
A 1 **B** 0 **C** 2 **D** 3 **E** −1
Čia nebereikalaujame tiesiogiai, kad $p \neq q$, bet tai išplaukia iš pirmo sakinio. Tada iš karto randame bendrą šaknį $x_0 = 1$, taigi $p+q=-1$.

5. **A**. Kiekvienu atveju **B**, **C**, **D**, **E** nesunku nurodyti du aibės taškus P ir Q, kai ne visa atkarpa priklauso aibei. Atveju **A** bet kuri atkarpa PQ, jungianti aibės taškus P ir Q, visa priklauso aibei.

6. **B**. Užtenka lygtis perrašyti taip:

$$y=\frac{1}{2}x-1,\quad y=2x+7,\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{3},\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\quad y=\frac{1}{2}x-\frac{4}{3},$$

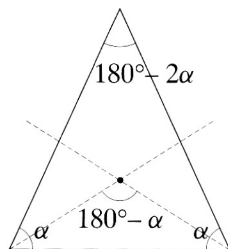
ir aišku, kad antroji tiesė nelygiagreti kitoms keturioms — jos kitas krypties koeficientas.

7. **D**. Formato A4 lapo ilgį pažymėkime a, o plotį b. Sulenkę lapą, gausime ilgį b, o plotį $\frac{1}{2}a$. Pagal sąlygą $a:b=b:\frac{a}{2}$, $a^2=2b^2$. Vadinasi, $v^2=\frac{a^2}{b^2}=2$, o $v^4=4$.
Beje, jeigu perlenkus pusiau naująjį lapą ilgis būtų $\frac{1}{2}a$, o plotis b, tai ilgio ir pločio santykis pasikeistų: $\left(\frac{1}{2}a\right):b=\frac{1}{2}v$.

8. **C**. Nesunku suskaičiuoti, kad nė vienos nuspalvintos sienos neturi 1 kubelis, vieną nuspalvintą sieną turi 6 kubeliai, dvi sienas — 12 kubelių, 3 sienas — 8 kubeliai.

9. **E**. Pažymėkime $Q(x;y)$. Tada $\frac{x+2}{2}=-2$, $\frac{y-2}{2}=4$. Todėl $x=-6$, $y=10$.

10. **A**. Sakykime, kad kampai prie pagrindo lygūs α. Tada kampo tarp pusiaukampinių didumas yra $180^\circ-\alpha$. Iš sąlygos $180^\circ-\alpha=3(180^\circ-2\alpha)$, taigi $\alpha=72^\circ$, ir trikampio kampai lygūs 36°, 72°, 72°.



11. **E**. Iš karto matome, kad trikampio su kraštinėmis 1, 2, 4 nėra, nes $1+2<4$. Analogiškai nėra ir tokio keturkampio, nes kitaip jo kraštinė 8 būtų didesnė už kitų sumą $1+2+4$. Panašiai ir su bet kuriuo daugiakampiu — jo kraštinė turi būti mažesnė už kitų kraštinių sumą. Mūsų atveju tai ne taip:

$$1+2+4+\cdots+2^{n-2}=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}=2^{n-1}-1<2^{n-1}.$$

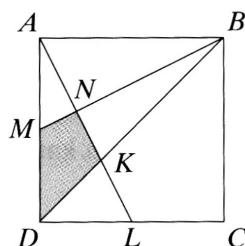
Vadinasi, nė su viena n reikšme tokio daugiakampio nėra.

12. **B**. Reikia išspręsti lygtį $\frac{2}{5} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Padauginę iš $5ab$, gauname $2ab = 5a + 5b$. Pertvarkyti ją lengviau, dar padauginus iš 2: $4ab - 10a - 10b = 0$, $2a(2b-5) - 5(2b-5) - 25 = 0$, $(2a-5)(2b-5) = 25$. Kadangi a ir yra b natūralieji, tai ir $2a - 5$ turi būti natūralusis skaičius — priešingu atveju $-3 \leqslant 2a - 5 \leqslant -1$, tada $2b - 5$ taip pat neigiamas tarp -3 ir -1, o abiejų dauginamųjų sandauga bus ne didesnė už 9. Skaičių 25 galima išskaidyti tik taip: $25 = 25 \cdot 1 = 5 \cdot 5 = 1 \cdot 25$. Bet kadangi $a < b$, tai ir $2a - 5 < 2b - 5$, todėl $2a - 5 = 1$, $2b - 5 = 25$. Iš čia $a = 3$, $b = 15$. Taigi yra tik viena pora norimų skaičių.

13. **D**. Kadangi skaičiaus 2^n dalikliai yra skaičiai $1, 2, 2^2, \ldots 2^n$, o jų yra $n + 1$, tai $d(2^n) = n + 1$.
Beje, sąlygos netenkina atsakymas **B** (kuris teisingas, kai $n = 1$) ir **E** (kuris teisingas, kai $n = 2$).

14. **B**. Įsivaizduokime, kad dabar keliamieji metai, vasario 29 diena. Kita vasario 29 diena bus po 4 metų, t. y. po $4 \cdot 365 = 1460$ dienų. Kadangi tai sudaro 208 savaites ir 4 dienas, tai reikės pralaukti 7 kartus tiek, kad dienų skaičius dalytųsi iš 7. Vadinasi, vėl sekmadienį jo gimimo diena bus po $4 \cdot 7 = 28$ metų.
Vertėjo pastaba. Uždavinys ne visai korektiškas todėl, kad keliamieji metai ne visada kartojasi kas 4 metus. Įsivaizduokime, kad žmogus gimė 1896 metų vasario 29 dieną. 1900 metai nėra keliamieji (kai metų skaičius baigiasi 00, jis turi dalytis iš 400, ir tik tada metai keliamieji). Vadinasi, kita vasario 29 diena bus tik po 8 metų, t. y. po $8 \cdot 365 = 2920$ dienų. Kadangi tai sudaro 417 savaičių ir 1 dieną, tai vasario 29 dienos sekmadienio reikės laukti, kaip jau nustatėme, dar $6 \cdot 4 = 24$ metus. Vadinasi, iš viso vasario 29 dienos sekmadienio teks palaukti 32 metus.

15. **C**. Trikampiai ADL ir BAM lygūs ir statūs, todėl $\angle MAN + \angle AMN = \angle DAL + \angle AMB = \angle DAL + \angle DLA = 90^\circ$, ir trikampis MNA status, t. y. $AL \perp MB$. Statieji trikampiai ABN ir AMN panašūs, panašumo koeficientas $AB : AM = 2$, todėl jų plotai sutinka kaip $4:1$, taigi $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{5} S_{\triangle ABM} = \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{5}$.



Trikampiai AKB ir LKD panašūs, $AK : KL = AB : DL = 2$, taigi $KL = \frac{1}{3} AL$. Kadangi $\triangle KLD$ ir $\triangle ALD$ turi bendrą aukštinę iš viršūnės D, tai $S_{\triangle DKL} = \frac{1}{3} S_{\triangle ALD} = \frac{1}{3}$.
Vadinasi, keturkampio $DMNK$ plotas lygus $S_{\triangle ADL} - S_{\triangle AMN} - S_{\triangle DKL} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$.

16. **A**. Nelygybes **B**, **C**, **D**, **E** įrodyti nesunku:
$a + 2 < b + 3$, nes $a < b$,
$2a < 3b$, nes $a < b + \frac{b}{2}$,
$2(a + 2) < 3(b + 3)$, nes $a < b + \frac{5}{2} + \frac{b}{2}$,

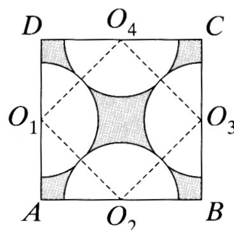
$(a+2)^2 < (b+3)^2$, nes $a+2 < b+3$.

Vadinasi, galima iš karto rinktis atsakymą **A**. Galima ir nurodyti a ir b reikšmes, netenkinančias šios nelygybės:

$a = \frac{1}{16}$, $b = \frac{1}{8}$, tada nelygybė $\left(\frac{1}{16}\right)^2 < \left(\frac{1}{8}\right)^3$ neteisinga, nes $2^9 > 2^8$.

17. **A**. „Sausos" žolės turime 40%, t. y. 400 kg, ir tai sudaro 85% šieno. Vadinasi, 1% šieno yra $\frac{400}{85}$ kg, o 100% šieno yra $\frac{400 \cdot 100}{85} = \frac{800 \cdot 100}{170} = \frac{8000}{17}$ kg.

18. **B**. Užtenka apskaičiuoti pusskritulio spindulį r. Kadangi $2r = O_1O_2 = \frac{1}{2}\ BD = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tai $r = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Užtušuotos srities plotas lygus kvadrato plotui minus 4 pusskritulių plotai:

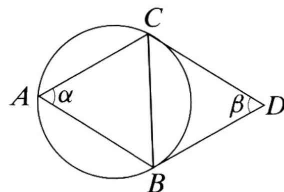


$$1 - 2 \cdot \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

19. **D**. Nesunku surašyti tuos skaičius, jie penkiaženkliai: 11 000, 10 100, 10 010, 10 001, 20 000. Taigi jų yra 5.

20. **D**. Jeigu bokšto ir jo modelio matmenų santykis yra k, tai jų tūrių ir masių santykis yra k^3. Vadinasi, $k^3 = 8\,000\,000$, $k = 200$. Todėl modelio aukštis yra $\frac{300}{k} = \frac{300}{200} = 1{,}5$ m.

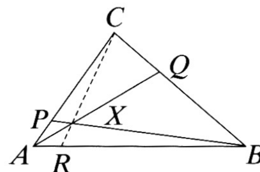
21. **A**. Pažymėkime $\angle CAB = \alpha$. Tada $\angle ACB = \frac{\pi-\alpha}{2}$, kampas tarp liestinės ir stygos $\angle DCB = \angle DBC = \alpha$. Todėl $\angle CDB = \pi - 2\alpha$. Kita vertus, $\angle CDB = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{\pi-\alpha}{4}$. Vadinasi, $\pi - 2\alpha = \frac{\pi-\alpha}{4}$, $4\pi - 8\alpha = \pi - \alpha$, $7\alpha = 3\pi$, $\alpha = \frac{3}{7}\pi$.



22. **B**. Kadangi $AP = PC = \frac{1}{3}$, $CQ : QB = \frac{1}{2}$, tai pagal Čevos teoremą

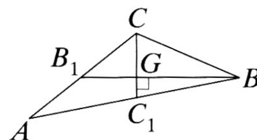
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1,$$

todėl $AR : RB = (CQ : QB) \cdot (AP : PC) = = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.



23. **B**. Susikirtimo taškas $(x_0; y_0)$, abi koordinatės neigiamos. Bet $y_0 = ax_0$, todėl $a = \frac{y_0}{x_0}$ — teigiamas. Tai pat $y_0 = -x_0 + b$, $b = x_0 + y_0$, taigi b neigiamas. Nustatėme, kad $a > 0$, $b < 0$.

24. E. Kadangi C_1 ir B_1 yra kraštinių vidurio taškai, tai $CA^2 + BA^2 = 4B_1C^2 + 4BC_1^2 = 4(B_1G^2 + CG^2 + C_1G^2 + GB^2)$. Bet pagal pusiaukraštinių savybę $B_1G = \frac{1}{2}GB$, $C_1G = \frac{1}{2}CG$, todėl $CA^2 + BA^2 = 4\left(\frac{1}{4}GB^2 + CG^2 + \frac{1}{4}CG^2 + GB^2\right) = 4 \cdot \frac{5}{4}(CG^2 + GB^2) = 5BC^2$.



25. E. Pastebėkime, kad piramidės sienų plokštumos dalija erdvę į 15 sričių (tos sritys iškilos, kadangi jos yra puserdvių — erdvės dalių, kurias riboja plokštumos — sankirta). Viena iš sričių yra aprėžta, ir tai yra duotoji piramidė. Likusios sritys yra neaprėžtos.

Kadangi piramidė yra sferos viduje, tai sfera turi bendrų taškų su visomis erdvės sritimis, į kurias erdvę dalija piramidės sienų plokštumos, išskyrus tą dalį, kuri ir yra pati piramidė. Vadinasi, sfera turi bendrų taškų su 14 erdvės dalių. Kadangi sritys iškilos, tai sfera yra padalyta į 14 dalių.

26. A. Pažymėkime:

x — skaičius mokyklų, dalyvavusių tik kaip gimnazija ir licėjus,

y — skaičius mokyklų, dalyvavusių tik kaip gimnazija ir koležas,

z — skaičius mokyklų, dalyvavusių tik kaip koležas ir licėjus.

Iš uždavinio sąlygos $\begin{cases} 703 + x + y + 29 = 782, \\ 2675 + y + z + 29 = 2921, \\ 725 + z + x + 29 = 929. \end{cases}$

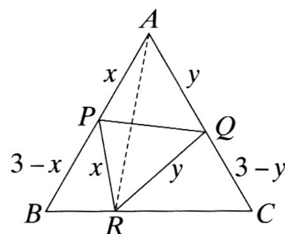
Ši sistema ekvivalenti sistemai $\begin{cases} x + y = 50, \\ y + z = 217, \\ z + x = 175. \end{cases}$

Sudėję šias tris lygtis ir padalijęs iš 2, turime $x + y + z = 221$. Iš šios lygties atėmę kiekvieną iš ankstesnių, gauname $x = 4$, $y = 46$, $z = 171$.

Taigi kaip gimnazija ir licėjus dalyvavo tik 4 mokyklos.

27. A. Iš sąlygos išplaukia, kad $PR = PA$, $QR = QA$. Pažymėkime $PA = PR = x$, $QA = QR = y$. Tada $PB = 3 - x$, $QC = 3 - y$. Iš kosinusų teoremos trikampiams BRP ir CRQ

$$\begin{cases} x^2 = 1^2 + (3 - x)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (3 - x)\cos 60^\circ, \\ y^2 = 2^2 + (3 - y)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (3 - y)\cos 60^\circ. \end{cases}$$



Iš čia $0 = 1 + 9 - 6x - (3 - x)$, $0 = 4 + 9 - 6y - 2(3 - y)$, t. y. $x = \frac{7}{5}$, $y = \frac{7}{4}$.
Dabar kosinusų teoremą taikome trikampiui APQ:

$$PQ^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ = \left(\frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49 \cdot 21}{25 \cdot 16}.$$

Vadinasi, $PQ = \frac{7}{20}\sqrt{21}$.

28. D. Remiantis sekos apibrėžimu,
$u_2 = u_1$, $u_3 = u_2 + u_1 = 2u_1$, $u_4 = u_3 + u_2 = 3u_1$, $u_5 = u_4 + u_3 = 5u_1$, $u_6 = u_5 + u_4 = 8u_1$, $u_7 = u_6 + u_5 = 13u_1$, $u_8 = u_7 + u_6 = 21u_1$, $u_9 = $ $= u_8 + u_7 = 34u_1$, $u_{10} = u_9 + u_8 = 55u_1$,
Kadangi $u_{10} = 10$, tai $55u_1 = 10$, t. y. $u_1 = \frac{2}{11}$.
Pastaba. Nagrinėjamoji seka priklauso klasei vadinamųjų Fibonačio sekų, apibrėžiamų sąlygomis:
1) u_0, u_1 — duoti realieji skaičiai,
2) $u_n = \alpha u_{n-1} + \beta u_{n-1}$, kai $n \geqslant 2$; čia α ir β — pastovūs realieji skaičiai.

29. A. Aišku, kad sutvarkytojo daugianario koeficientų suma lygi jo reikšmei taške $x = 1$. Iš sąlygos $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, $f(g(x)) = 12x^4 + 56x^2 + 70$. Reikia rasti $g(1)$. Kadangi $f(g(x)) = 12 \cdot 1^4 + 56 \cdot 1^2 + 70 = 138$, tai $g(1)$ yra tokia reikšmė y, kuriai $f(y) = 138$. Sprendžiame lygtį $3y^2 - 2y + 5 = 138$, t. y. $3y^2 - 2y - 133 = 0$. Jos sprendiniai $y_1 = -\frac{19}{3}$ ir $y_2 = 7$.
Kadangi atsakymuose reikšmės 7 nėra, tai „gali būti“ $g(1) = -\frac{19}{3}$.
Pastaba. Galima rasti ir $g(x)$. Imdami $g(x) = ax^2 + bx + c$, iš pirmos lygties turime:
$3(ax^2 + bx + c)^2 - 2(ax^2 + bx + c) + 5 = 12x^4 + 56x^2 + 70$.
Įstatome $x = 0$ (t. y. sulyginame laisvuosius narius):
$3c^2 - 2c + 5 = 70$.
Sulyginame koeficientus prie x^4 ir x^3:
$3a^2 = 12$, $6ab = 0$.
Taigi $b = 0$, $a = \pm 2$. Sulyginame koeficientus prie x^2 ir x:
$6ac - 2a = 56$, arba $3ac - a = 28$.
Pagaliau, $g(1) = -\frac{19}{3}$, t. y. $a + c = -\frac{19}{3}$. Jei $a = 2$, tai $c = -\frac{25}{3}$, o jei $a = -2$, tai $c = -\frac{13}{3}$, ir tikrai $3ac - a = 26 + 2 = 28$. Gauname $g(x) = -2x^2 - \frac{13}{3}$.
Patikrinę įsitikiname, kad $f(g(x)) = 3\left(-2x^2 - \frac{13}{3}\right)^2 - 2\left(-2x^2 - \frac{13}{3}\right) + 5 = 12x^4 + 56x^2 + 70$.

30. C. Remiantis apibrėžimu,

$$3\Box 5 = 3 \cdot 5 + 3 + 5 = 23, \quad 2\Box x = 2x + 2 + x.$$

Todėl $3x + 2 = 23$, $x = 7$.



1. **D**. Kadangi mūsų laiko skaičiavimas prasidėjo nuo pirmų (o ne nuo „nulinių“) metų, tai pirmas šimtmetis baigėsi su 100-aisiais metais, o pirmasis tūkstantmetis — 1000 metais. Taigi ir antras tūkstantmetis baigsis su 2000 m., t. y. 2000 metų gruodžio 31 d.

2. **C**. Pasižymėkime x ieškomą laiką (minutėmis), skirtą lengviems uždaviniams. Tada vidutiniams uždaviniams skirta $2x$ minučių, o sunkiems — $4x$ minučių. Iš viso sprendimui Karolina skyrė 70 minučių, taigi $x+2x+4x = 70$, $x = 10$. Taigi lengviems uždaviniams spręsti ji skyrė 10 minučių.

3. **D**. Matome, kad kryžiaus perimetrą sudaro 14 kvadratėlio kraštinių. Todėl kvadratėlio kraštinė lygi $\frac{6}{14}$, o plotas $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$. Figūros plotas 6 kartus didesnis: $6 \cdot \frac{9}{49} = \frac{54}{49}$.

4. **A**. Atkarpa PQ lygiagreti pirmo ir trečio ketvirčių pusiaukampinei. Atkarpos PR vidurys yra taškas (0; 0), esantis toje pusiaukampinėje. Vadinasi, mūsų tiesė ir yra minėta pusiaukampinė $y = x$, arba $y - x = 0$.

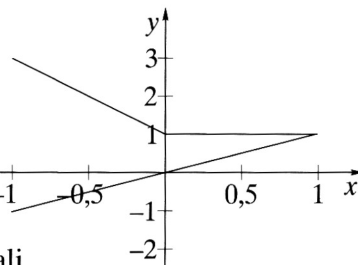
5. **C**. Mažiausiai taškų Ona gautų, jeigu teisingai atsakytų į pirmus 20 klausimų, ir klaidingai — į visus 10 trečiojo dešimtuko klausimus. Tada ji turėtų $30 + 10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 - 10 \cdot 1{,}25 = 87{,}5$ taško.

6. **E**. Kadangi abi lygtys turi turėti sprendinių, tai $p \neq 1$ ir $p \neq 0$. Spręsdami pirmą lygtį, gauname $x = \frac{1}{p-1}$, spręsdami antrą — $x = \frac{1}{p}$. Nesunku įsitikinti, kad tos šaknys nesutampa su jokiu p.

7. **B**. Man $9 : 3 \cdot 5 = 15$ metų, o tėčiui yra $3 \cdot 15 = 45$. Man ir broliams kartu dabar $15 + 11 + 9 = 35$ metai. Taigi dabar tėčio ir bendro sūnų amžiaus skirtumas yra 10 metų. Per metus tas skirtumas sumažėja 2 metais, nes trijų sūnų bendras amžius padidėja 3, o tėčio tik 1. Tas amžių skirtumas išnyks po $10 : 2 = 5$ metų.

8. **A**. Pažymėkime kubo kraštinę x. Tada didžiausias atstumas — kubo įstrižainė — lygus $\sqrt{x^2 + x^2 + x^2}$. Taigi $x\sqrt{3} = 1$, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Vadinasi, kubo tūris lygus $x^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

9. **D**. Nesunku įsitikinti, kad $1995 < 199^5 < 19^{95}$, nes $199^5 < (19^2)^5 = 19^{10} < 19^{95}$. Taip pat $59^{91} > (19 \cdot 3)^{91} = 19^{91} \cdot (3^3)^{30} \cdot 3 > 19^{91} \cdot 19^{30} = 19^{121} > 19^{95}$. Vadinasi, užtenka palyginti skaičius 5^{991} ir 59^{91}: turime $5^{991} > (5^3)^{330} = 125^{330} > 59^{91}$. Taigi didžiausias skaičius yra 5^{991}.



10. B. Atsakymai **A** ir **D** atkrenta — nei viena iš pavaizduotų funkcijų nėra pastovioji. Atkrenta ir atsakymas **C** — tai dvi tiesės. Tikriname **B**. Apatinė paveikslėlio tiesė eina per taškus (0; 0) ir (1; 1) — taigi tai tiesė $f(x) = x$. Reiškinys $|x|+|1-x|$ intervale $[-1; 0]$ lygus $-x+1-x = 1-2x$, o tiesė $1-2x$ eina per taškus $(-1; 3)$ ir (0; 1), taigi atitinka viršutinio grafiko kairę dalį. Reiškinys $|x| + |1-x|$ intervale [0; 1] lygus $x + 1 - x = 1$, taigi atitinka viršutinio grafiko dešinę dalį. Teisingas atsakymas **B**.

11. A. Duotoji nelygybė ekvivalenti nelygybei $-3 \leqslant 1 - |x| \leqslant 3$, arba $-3 \leqslant |x| - 1 \leqslant 3$, $-2 \leqslant |x| \leqslant 4$, $|x| \leqslant 4$. Taigi ji turi sveikuosius sprendinius $x = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$.

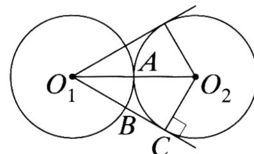
12. B. Turime

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{kai } x > 0, \\ -1, & \text{kai } x < 0. \end{cases}$$

Vadinasi, kiekvienas iš 4 dėmenų gali įgyti reikšmę -1 arba 1. Kadangi dėmenų skaičius lyginis, tai galima būtų spėti, jog galimos reikšmės yra -4, -2, 0, 2, 4. Vis dėlto tai ne taip: jeigu visi 3 iš skaičių a, b ir c teigiami, gauname 4; jeigu 2 skaičiai teigiami, tai turime 2 teigiamus ir 2 neigiamus dėmenis, t. y. suma lygi 0; jeigu 2 skaičiai neigiami, tai vėl 2 neigiami ir 2 teigiami dėmenys; jeigu visi 3 skaičiai neigiami, tai turime 4 neigiamus dėmenis. Vadinasi, duotasis reiškinys gali įgyti tik reikšmes 0, ±4.

Gražus ir toks samprotavimas: kadangi visų dėmenų sandauga teigiama, tai neigiamų dėmenų skaičius lyginis, t. y. 4, 2 arba 0. Tada suma atitinkamai lygi -4, 0, 4.

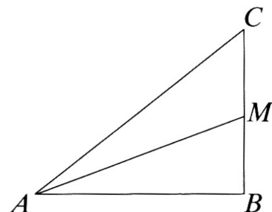
13. E. Skaičių $\sqrt[3]{4}$ ir $\sqrt[4]{8}$ sandauga lygi
$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[12]{4^4} \cdot \sqrt[12]{8^3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot 2^9} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5} = 2\sqrt[12]{32}$.
Galima skaičiuoti ir taip: $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{17}{12}} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 2\sqrt[12]{32}$.



14. B. Žymėkime kaip brėžinyje greta. Stačiajame trikampyje O_1O_2C turime $O_1O_2 = 20$ ir $O_2C = 10$, todėl $\angle O_2O_1C = 30^\circ$. Vadinasi, skritulio išpjovos AO_1B ir AO_2C atitinkamai sudaro $\frac{1}{12}$ ir $\frac{1}{6}$ skritulio ploto. Todėl užtušuotos srities plotas S lygus

$$S = S_{\triangle O_1O_2C} - S_{AO_1B} - S_{AO_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{12}\pi \cdot 10^2 - \frac{1}{6}\pi \cdot 10^2 =$$
$$= 50\sqrt{3} - 25\pi = 25(2\sqrt{3} - \pi).$$

15. **C**. Žymėkime kaip brėžinyje. Kadangi $AM = 5\,\text{cm}$, $AB = 4\,\text{cm}$, $MB = 3\,\text{cm}$, tai trikampis AMB yra statusis ir $\angle ABM = 90^\circ$. Todėl stačiojo trikampio ABC plotas lygus $12\,\text{cm}^2$.

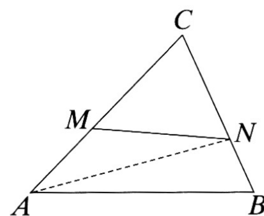


16. **B**. Daugianario $f(x) = a_{1995}x^{1995} + a_{1994}x^{1994} + \cdots + a_1x + a_0$ koeficientų suma lygi $f(x)$ reikšmei taške 1: $f(1) = a_{1995} + a_{1994} + \cdots + a_1 + a_0$. Bet $f(1) = (2 \cdot 1 - 1)^{1995} = 1$, taigi ieškomoji suma lygi 1.

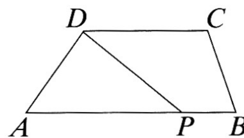
17. **A**. Jeigu $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$, tai $f(f(x)) = \frac{cf(x)}{2f(x)+3} = \frac{c^2x}{2cx+6x+9}$.
Pagal sąlygą lygybė $\frac{c^2x}{2cx+6x+9} = x$ teisinga kiekvienam $x \neq -\frac{3}{2}$. Tada ji ekvivalenti lygybei $c^2x = x^2(2c+6)+9x$, arba $2(c+3)x^2+(9-c^2)x = 0$. Kai $x = 1$ ir $x = -1$, turime lygybes $2(c+3)+(9-c^2) = 0$ ir $2(c+3)-(9-c^2) = 0$. Sudėję jas randame $c = -3$. Su šia reikšme lygybė $c^2x = x^2(2c + 6) + 9x$ virsta $9x = 9x$, taigi tikrai teisinga su visais x.

18. **D**. Remiantis uždavinio sąlyga,

$$\frac{S_{\triangle MNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}CM \cdot CN \sin\angle MCN}{\frac{1}{2}AC \cdot CB \sin\angle ACB} = \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}.$$



19. **C**. Trapecijos aukštinės ilgį pažymėkime h. Tada $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD)h$, $S_{\triangle APD} = \frac{1}{2}AP \cdot h$. Pagal sąlygą $\frac{1}{2}AP \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(AB + CD)h$, ir $AP = \frac{1}{2}(AB + CD) = \frac{1}{2}(40 + 16) = 28$.

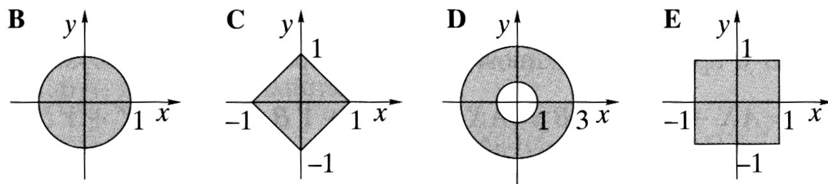


20. **A**. Sudauginę sąlygos lygybes, turime $(xyz)^2 = 36$, iš čia $xyz = 6$ arba $xyz = -6$. Pirmu atveju randame $x = -1$, $y = 3$, $z = -2$, taigi $x+y+z = 0$. Antru atveju $x = 1$, $y = -3$, $z = 2$, taigi vėl $x + y + z = 0$.

21. **C**. Užtenka žinoti, kad bent vienas iš minėtų faktų susijęs su Archimedo vardu. Gerai žinomas jo posakis:
„Duokite man atramos tašką, ir aš pajudinsiu Žemę“.

22. **D**. Nesunku apskaičiuoti visų sričių plotus.
A) Kadangi modulis neneigiamas, tai sritis tuščia ir laikoma, kad tokios srities plotas lygus 0.
B) Sritis $x^2 + y^2 < 1$ yra skritulys, kurio spindulys lygus 1, taigi jos plotas lygus $\pi \cdot 1^2 = \pi$.
C) Sritis yra kvadratas, kurio viršūnės (0; 1), (1; 0), (−1; 0), (0; −1).
Jo kraštinė lygi $\sqrt{2}$, taigi plotas lygus 2.

D) Sritis yra žiedas tarp apskritimų $x^2+y^2=9$ ir $x^2+y^2=1$, taigi jo plotas lygus skritulių plotų skirtumui: $9\pi-\pi=8\pi$.
E) Nelygybė $\max(|x|,|y|)<1$ reiškia, kad $|x|<1$, $|y|<1$. Sritis $|x|<1$ yra begalinė juosta, kurios plotis lygus 2. Taip pat ir $|y|<1$ yra panaši juosta. Juostų bendra sritis yra kvadratas, kurio kraštinė 2, o plotas lygus 4. Aišku, kad didžiausias yra srities **D** plotas 8π.

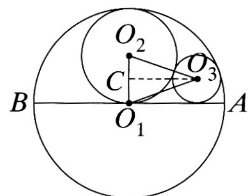


23. B. Kadangi $x<0$, tai
$\left|x-\sqrt{(x-1)^2}\right|=\left|x-|x-1|\right|=|x+x-1|=|2x-1|=|1-2x|=1-2x.$

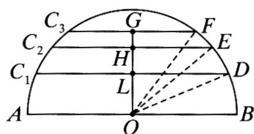
24. A. Spręsdami nelygybę intervaluose $(-\infty;-2)$, $[-2;1)$ ir $[1;+\infty)$, lengvai nustatome, kad sprendinys yra $(-3;2)$.
Kitas būdas. Reiškinys $|x-1|+|x+2|$ yra skaičių ašies taško x atstumų iki taškų 1 ir -2 suma. Aišku, kad x turi būti didesnis už -1 ir mažesnis už 2.

25. D. Turime
$f(g(x))=m\cdot g(x)+n=m(px+q)+n=mpx+n+mq,$
$g(f(x))=p\cdot f(x)+q=p(mx+n)+q=pmx+pn+q.$
Gauname lygtį $mpx+n+mq=pmx+pn+q$, kuri ekvivalenti lygčiai $n+mq=q+pn$, arba lygčiai $n(1-p)-q(1-m)=0$. Vadinasi, tik kai išpildyta ši sąlyga, duotoji lygtis turi sprendinių. Beje, tada jos sprendiniai yra visi realieji skaičiai.

26. C. Apskritimų K, L, M centrus pažymėkime O_1, O_2, O_3, o spindulius — r_1, r_2, r_3. Aišku, kad $O_1O_2=r_2=\frac{1}{2}r_1$, $O_2O_3=r_2+r_3=\frac{1}{2}r_1+r_3$, $O_1O_3=r_1-r_3$. Trikampio $O_1O_2O_3$ aukštinės į kraštinę O_1O_2 pagrindą pažymėkime C. Tada $O_1C=r_3$, $O_2C=r_2-r_3=\frac{1}{2}r_1-r_3$. Iš stačiųjų trikampių gauname $O_1O_3^2-O_1C^2=O_2O_3^2-O_2C^2$, arba $(r_1-r_3)^2-r_3^2=$ $=\left(\frac{1}{2}r_1+r_3\right)^2-\left(\frac{1}{2}r_1-r_3\right)^2$. Skaidome: $r_1(r_1-2r_3)=r_1\cdot 2r_3$, $r_1-2r_3=2r_3$, $r_1=4r_3$. Vadinasi, skritulių K ir M plotų santykis lygus $\frac{\pi r_1^2}{\pi r_3^2}=16$.



27. D. Skersmenį pažymėkime AB, jo vidurio tašką O, stygas C_1D, C_2E, C_3F, jų vidurio taškus L, H, G. Tada $LD=10$, $HE=8$, $GF=4$, $GH=HL$. Pažymėkime $OB=r$, $GH=x$, $OL=y$.



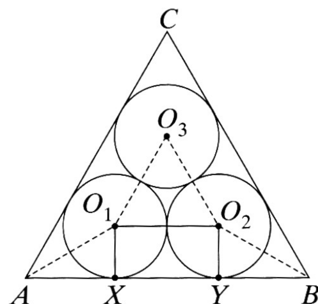
Iš stačiųjų trikampių ODL, OEH, OFG turime: $r^2=y^2+10^2$, $r^2=$ $=(y+x)^2+8^2$, $r^2=(y+2x)^2+4^2$. Prie pirmos lygties pridedame trečią

ir atimame dvigubą antrą: $0 = y^2 + (y + 2x)^2 - 2(y + x)^2 - 12$. Iš čia $2x^2 - 12 = 0$, $x = \sqrt{6}$.
Dabar atimame iš antros lygties pirmą ir įstatome x: $0 = 2xy + x^2 - 36$, $2\sqrt{6}y = 30$, $y = \frac{15}{\sqrt{6}}$. Iš pirmos lygties randame r:
$r^2 = \frac{225}{6} + 100 = \frac{75}{2} + 100 = \frac{550}{4} = \frac{25\cdot 22}{4}$, $r = \frac{5\sqrt{22}}{2}$.

28. **D**. Žymėkime kaip paveikslėlyje: O_1, O_2, O_3 — apskritimų centrai, X, Y — kraštinės AB ir apskritimų lietimosi taškai, r — apskritimų spindulys. Turime

$$AB = AX + XY + YB = AX + O_1O_2 + YB = 2r + AX + YB.$$

Trikampiai AXO_1 ir YBO_2 statieji ir turi 30° kampą. Todėl $AX = O_1X\sqrt{3} = r\sqrt{3}$, $YB = r\sqrt{3}$. Vadinasi, $AB = 2r + 2r\sqrt{3}$, o trikampio ABC perimetras lygus $3(2r + 2r\sqrt{3})$. Įstatę $r = 3$, gauname $18 + 18\sqrt{3}$.



29. **B**. Kadangi $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ ir $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$, tai

$$T = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2 + \sqrt{3} + 1} + \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2 - \sqrt{3} + 1} =$$

$$= \frac{(2\sqrt{2} + \sqrt{6})(3 - \sqrt{3}) + (2\sqrt{2} - \sqrt{6})(3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{12\sqrt{2} - 2\sqrt{18}}{6} =$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Vadinasi, $T^2 = 2$.

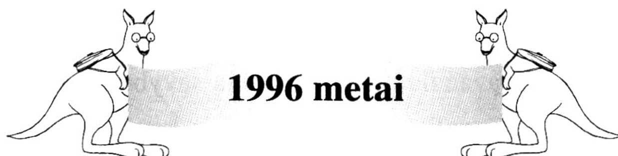
30. **C**. Duota, kad $n = \underbrace{99\ldots9}_{1995} = 10^{1995} - 1$. Todėl

$$n^2 = (10^{1995} - 1)^2 = 10^{2\cdot 1995} - 2\cdot 10^{1995} + 1 =$$

$$= 1\underbrace{0\ldots0}_{1995}\underbrace{0\ldots0}_{1995} - 2\underbrace{0\ldots0}_{1995} + 1 =$$

$$= \underbrace{99\ldots9}_{1994}8\underbrace{00\ldots0}_{1995} + 1 = \underbrace{99\ldots9}_{1994}8\underbrace{00\ldots0}_{1994}1.$$

Taigi skaičiaus n^2 dešimtainiame užraše yra 1994 devynetai.



1. C. Kadangi $2^{12} \cdot 5^8 = 2^4 \cdot 2^8 \cdot 5^8 = 16 \cdot 10^8$, tai skaičių sudaro 16 ir aštuoni nuliai — iš viso 10 skaitmenų.

2. B. Kadangi $A = 9^{81}$, tai $A < D$. Nelygybės $E < C < D$ akivaizdžios. Akivaizdi ir nelygybė $99 < 9^9$, iš kur $D < B$. Taigi didžiausias skaičius **B**.

3. C. Vadinkime A kubo priekine siena, B — dešine, C — viršutine siena. Atlenkę B ir C į priekinę plokštumą, turime trečiame paveikslėlyje pavaizduotą raidžių C, A ir B išsidėstymą. Virš C galime atlenkti užpakalinę sieną (joje raidė B), po siena A — apatinę sieną F, į kairę nuo A — kairę sieną F. Renkamės atsakymą C.
Sunkiau įrodyti, kad kitos išklotinės neįmanomos (net jei nekreipiame dėmesio į raidės padėtį sienelėje (todėl būtų geriau sienas žymėti simetriškais ženklais, pavyzdžiui, A žymėti kryželiu $+$, B — keturiais taškais $::$, C — apskritimu $\circ$, F — kvadratėliu $\square$).
Pirma išklotinė neįmanoma, nes vienintelė A negali atsidurti tarp dviejų F.
Antra išklotinė netinka, nes joje atėjus iš C į A siena B yra į dešinę, o kubelyje — į kairę. Panašiai įsitikiname, kad netinka ketvirta ir penkta išklotinės.

4. C. Jei pradinė prekės kaina A, tai antra kaina — $1{,}05A$, trečia — $1{,}1 \cdot 1{,}05A$, ketvirta (sumažinus iki 95%) — $0{,}95 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}05A$, galutinė (sumažinus iki 90%) — $0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}05A$. Kadangi paskutinė kaina lygi $(1-0{,}1)(1-0{,}05)(1+0{,}1)(1+0{,}05)A = (1-0{,}1^2)(1-0{,}05^2)A$, tai ji mažesnė už A.

5. A. Pažymėję statinius a ir b, o įžambinę c, turime $S_1 = \frac{1}{8}a^2\pi$, $S_2 = \frac{1}{8}b^2\pi$, $S_3 = \frac{1}{8}c^2\pi$. Iš Pitagoro teoremos $a^2 + b^2 = c^2$ išplaukia, kad $S_1 + S_2 = S_3$.

6. D. Pradėti geriausia nuo didžiųjų monetų. Jei imame 5 po 1 Lt — vienas būdas. Jei imame 4 po 1 Lt, tai likusį litą galima sudaryti imant 2 monetas po 50 ct arba 1 monetą po 50 ct (ir vienareikšmiškai papildyti 10-centčiais) arba 0 monetų po 50 ct (ir viską keisti 10-centčiais). Jei imame 3 po 1 Lt, tai 50-cenčių galima imti 4, 3, 2, 1, 0. Jei imame 2 po 1 Lt, tai po 50 ct galima imti 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Jei imame 1 po 1 Lt, tai po 50 ct galima imti 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. Jei po 1 Lt neimame, tai po 50 ct galima imti 10, 9, ..., 1, 0. Taigi turime $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 3 \cdot 12 = 36$ būdus.

7. D. Sprendžiame: $-5 \leqslant 2 - |x| \leqslant 5$, $-7 \leqslant -|x| \leqslant 3$, $-3 \leqslant |x| \leqslant 7$, $|x| \leqslant 7$. Turime 15 sprendinių: 0, ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±7.

8. **C**. Aišku, kad sąlygą tenkinanti figūra turi turėti tokią savybę: statmenoji jos projekcija į bet kurią tiesę yra to paties ilgio atkarpa — vadinamoji pastoviojo pločio figūra. Iš čia pavaizduotų figūrų tokią savybę turi tiktai skritulys.

9. **A**. Aišku, kad įstrižaine galima nukirsti vieną n-kampio kampą. Kol liks trikampis, teks atkirsti $n-3$ trikampius. Vadinasi, n-kampis bus padalytas į $n-2$ trikampius, todėl visų kampų suma lygi $(n-2)\pi$.

A

10. **E**. Trejetas E netinka, nes tada dviejų kraštinių ilgių suma būtų mažesnė už trečios kraštinės ilgį: $11 + 42 < 55$.

11. **E**. Jeigu gyventojų skaičius lygus M ir kasmet padidėja $p\%$, tai po n metų jis bus lygus

$$M_n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n M.$$

Turime $M = 100\,000$, $p = 10$, $n = 10$, taigi reikia apytiksliai apskaičiuoti

$$M_{10} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \cdot 10^5.$$

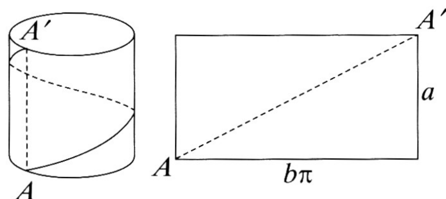
Apskaičiuoti $1{,}1^{10}$ paprasta dauginant: $(1{,}1)^2 = 1{,}21$, $(1{,}1)^3 = 1{,}331$, $(1{,}1)^4 = 1{,}4641$, $(1{,}1)^5 = 1{,}61051$. Taigi su trūkumu $1{,}1^{10} \approx 1{,}6^2 = 2{,}56$. Apvalindami skaičių $2{,}56 \cdot 10^5 = 256\,000$ tikslumu iki 10^4, gauname $M \approx 260\,000$. Beje, tiksli $1{,}1^{10}$ reikšmė yra 2,593742601.

12. **E**. Kubo briaunos ilgis yra 3 cm, taigi tūris lygus 27 cm^3. Išpjautus kanalus sudaro 7 kubai, kurių kiekvieno briaunos ilgis yra 1 cm. Vadinasi, kanalų tūris lygus 7 cm^3, o gauto kūno tūris lygus 20 cm^3.

13. **C**. Lygybė $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ekvivalenti lygybei $a + b = a + 2\sqrt{ab} + b$, t. y. lygybei $ab = 0$.

14. **A**. Galima remtis tokia savybe: jeigu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = t$, tai ir $\frac{a+c}{b+d} = t$. Vadinasi, $\frac{3-4x}{2x^2-x} = \frac{3}{2} = \frac{3-4x+3}{2x^2-x+2}$. Taigi $\frac{6-4x}{2x^2-x+2} = \frac{3}{2}$.

15. **D**. Paveikslėliai vaizduoja skruzdėlės kelią dėžutės paviršiumi ir „suplokštintą“ jos kelią stačiakampyje, gautame perpjovus ir išvyniojus dėžutę. Trumpiausias kelias iš taško A į tašką A' yra stačiakampio įstrižainė, o jos ilgis lygus $\sqrt{a^2 + b^2\pi^2}$.



16. **B**. Sakykime, kad duotas skaičius a. Trigubo to skaičiaus pusės kubas yra $\left(\frac{3a}{2}\right)^3 = \frac{27a^3}{8}$. Triguba to skaičiaus kubo pusė yra $\frac{3a^3}{2}$. Tie skaičiai lygūs tik kai $a = 0$.

17. **E**. Pirma lygtis neturi sprendinių, kai $p = -1$, antra — kai $p = 0$. Su likusiomis reikšmėmis pirmos lygties sprendinys yra $\frac{3}{p+1}$, antros — $\frac{1+p}{p} + 1$. Jie lygūs, kai $\frac{3}{p+1} = \frac{1+p}{p} + 1$, t. y. kai $3p = (1+p)^2 + p(p+1)$, arba $2p^2 + 1 = 0$. Tokių p nėra, taigi renkamės atsakymą **E**.

18. **D**. Užfiksuokime vieną iš dėžutės briaunų, pavyzdžiui, AB. Kiekvieną tetraedro briauną galima „uždėti“ ant jos dviem būdais. Po to likusių tetraedro viršūnių padėtis nustatyta vienareikšmiškai. Kadangi tetraedras turi 6 briaunas, tai jį įdėti į dėžutę galima $6 \cdot 2 = 12$ būdų.

19. **C**. Lygtis $3\square 5 = 2\square b$ ekvivalenti lygčiai $3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 5 = 2b + 2 \cdot 2 - b$, o tai reiškia, kad $b = 12$.

20. **B**. Teiginys „x yra sveikasis skaičius“ teisingas visiems aibės $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ skaičiams, teiginys „$x^2 - 3x$ yra neigiamasis skaičius“ neteisingas skaičiams 3, 4 ir 5, o teiginys „$x + \frac{1}{x}$ yra sveikasis skaičius“ neteisingas skaičiams 2, 3, 4 ir 5.
Vadinasi, reikia nustatyti, kuris skaičius įeina tik į vieną iš poaibių $\{3, 4, 5\}$ ir $\{2, 3, 4, 5\}$, o tai tik skaičius 2.

21. **A**. Iš skaičiaus $10! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ galima sudaryti didesnes laiko atkarpas:
1 minutė = 60 sekundžių; $60 = 6 \cdot 10$; vadinasi, turime $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ minučių;
1 valanda = 60 minučių; $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$; turime $2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ valandų;
1 para = 24 valandos; $24 = 3 \cdot 8$; turime $2 \cdot 7 \cdot 3$ parų;
1 savaitė = 7 paros; turime $2 \cdot 3 = 6$ savaites.
Vadinasi, 10! sekundžių — tai 6 savaitės.

22. **B**. Jeigu $a : b : c = 1 : 2 : 4$, tai $b = 2a$, $c = 4a$, todėl $a(b+c) = 6a^2$, $b(c+a) = 10a^2$, $c(a+b) = 12a^2$. Iš čia
$a(b+c) : b(c+a) : c(a+b) = 6 : 10 : 12$.

23. **C**. Kad būtų teisinga lygybė

$$\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1},$$

yra būtina ir pakankama, kad būtų kartu teisingos nelygybės

$$x^2 - 1 \geqslant 0, \quad x - 1 \geqslant 0, \quad x + 1 \geqslant 0,$$

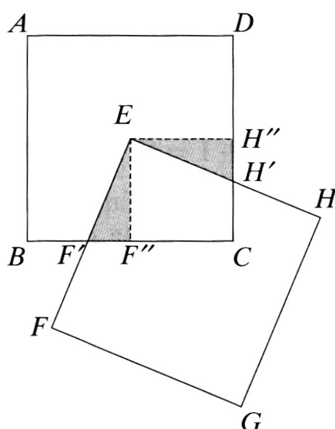
arba nelygybės $(x-1)(x+1) \geqslant 0$, $x \geqslant 1$, $x \geqslant -1$, t. y. nelygybė $x \geqslant 1$.

24. **E**. Kūginio indo tūris lygus

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 2 = \frac{8}{3}\pi,$$

o kubo, kurio briauna 2, tūris lygus $V_2 = 8$. Kadangi $v_1 > v_2$ (nes $\pi > 3$), tai vanduo iš kūginio indo netilps į kubinį indą.

25. **A**. Kraštinių EF ir BC susikirtimo tašką pažymėkime F', kraštinių EH ir DC — raide H', o taško E projekcijas į kraštines BC ir DC — atitinkamai F'' ir H''.
Lengva įsitikinti, kad $\triangle F'F''E = \triangle H'H''E$. Todėl bendros kvadratų dalies $EH'CF'$ plotas lygus kvadrato $EH''CF''$ plotui, t. y. $\frac{a^2}{4}$.



26. **C**. Skaičiuojame sekos narius:
$a_1 = 4$, $a_2 = b$, $a_3 = -b$, $a_4 = 4$, $a_5 = 4$, $a_6 = 8 - b$, $a_7 = 16 - b$, $a_8 = 28 - 2b$, ir pagaliau $a_9 = 52 - 4b$. Vadinasi, $a_9 = 0$, kai $b = 13$.

27. **B**. Tiesė, kurios lygtis yra

$$(m + 1)x + (m - 2)y - 5m + 4 = 0$$

eina per koordinačių pradžios tašką, kai $-5m + 4 = 0$, t. y. $m = \frac{4}{5}$. Vadinasi, atsakymai **A** ir **D** klaidingi. Klaidingas ir atsakymas **C**, nes $m = -1$ duoda tiesę $y = 3$, lygiagrečią ašiai Ox, o $m = 2$ — tiesę $x = 2$, lygiagrečią ašiai Oy.
Taškas (2; 3) yra bendras ne tik tiesių $x = 2$ ir $y = 3$ taškas, bet ir visų tiesių taškas, nes $(m + 1) \cdot 2 + (m - 2) \cdot 3 - 5m + 4 \equiv 0$.

28. **D**. Mažiausias teigiamas lygties $\sin x = 0{,}5$ sprendinys yra $x_1 = \frac{\pi}{6}$, o kitas — skaičius $x_2 = \frac{5\pi}{6}$. Vadinasi, lygtis $\sin x = 0{,}5$ turi lygiai vieną sprendinį intervale $[0; \alpha]$, kai $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$. Iš atsakymuose nurodytų intervalų į šį patenka tik $\frac{\pi}{5} < \alpha \leqslant \frac{2\pi}{3}$.

29. **B**. Kai pozicinės sistemos pagrindas yra a, tai $26 = 2a + 6$, $23 = 2a + 3$, $642 = 6a^2 + 4a + 2$, todėl lygybė $26 \cdot 23 = 642$ reiškia, kad

$$(2a + 6)(2a + 3) = 6a^2 + 4a + 2,$$

t. y. $a^2 - 7a - 8 = 0$. Šios lygties sprendiniai yra -1 ir 8, taigi pagrindas lygus 8.

30. **C**. Kadangi abi funkcijos yra lyginės, tai iš pradžių nagrinėkime $x \geqslant 0$. Lygtis virsta $|\sin x| = \sin x$, o jos sprendiniai — tai intervalai $[0; \pi]$, $[2\pi; 3\pi]$, $[4\pi; 5\pi]$ ir t. t. Analogiškai dėl lyginumo, kai $x \leqslant 0$, sprendinių intervalai yra $[-\pi; 0]$, $[-3\pi; -2\pi]$ ir t. t. Vadinasi, pradinės lygties sprendinių intervalai yra $[-\pi; \pi]$ (sujungėme intervalus $[-\pi; 0]$ ir $[0; \pi]$) ir $[2k\pi; 2k\pi + \pi]$, $[-2k\pi - \pi, -2k\pi]$, $k \in N$. Pirmojo intervalo ilgis yra 2π, likusių — π.



1. B. Matome, kad $4^5 \cdot 5^{13} = 2^{10} \cdot 5^{13} = 5^3 \cdot 10^{10} = 125 \cdot 10^{10}$. Iš viso turėsime tris nenulinius skaitmenis ir 10 nulių.

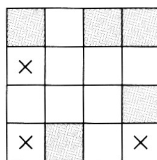
2. D. Kad man sueitų $10a$ metų, turi praeiti $9a$ metų. Taigi tai bus metai $1997 + 9a$.

3. B. Pastebime, kad du spinduliai gali sudaryti tik vieną statųjį kampą, o trys spinduliai — 2 kampus. Keturi spinduliai (dvi tiesės) gali sudaryti 4 stačiuosius kampus. Išvedę penktą spindulį, naujų stačiųjų kampų nebegausime. Kita vertus, kitas spindulių ketvertukas vėl gali sudaryti 4 stačiuosius kampus. Taigi 20 spindulių, o tai yra 5 ketvertukai, gali sudaryti $5 \cdot 4 = 20$ stačiųjų kampų.

4. B. Aišku, kad

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{abc}{bc+ac+ab}.$$

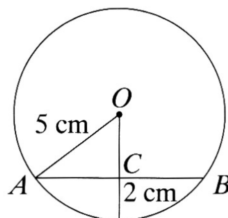
5. D. Aišku, kad būtina užtušuoti kvadratėlius, pažymėtus kryželiu $\times$, o tada figūra jau bus simetriška centro atžvilgiu.



6. C. Kadangi aibė Y turi įeiti visa, tai atsakymai **A**, **B**, **D**, **E** netinka. Atsakymas **C** geras: matome, kad į užtušuotą sritį įeina tiek aibių X ir Z bendra dalis, tiek ir visa aibė Y.

7. D. Žinoma, $\sqrt{2^{100}} = 2^{50}$.

8. C. Nagrinėkime kamuoliuko pjūvį plokštuma, einančia per kamuoliuko centrą statmenai vandens paviršiui. Kamuoliuko centras nuo vandens paviršiaus nutolęs atstumu $OC = 3\,\text{cm}$. Todėl apskritimo, skiriančio šlapiąją kamuoliuko paviršiaus dalį nuo sausosios, spindulys $AC = \sqrt{AO^2 - OC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4(\text{cm})$.

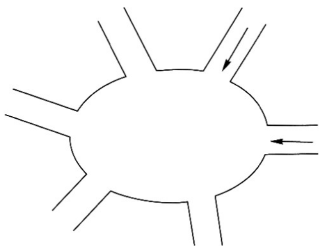


9. **C**. Kadangi

$$\begin{aligned} b &= 999\,221 \cdot 999\,223 = (999\,222 - 1)(999\,222 + 1) = \\ &= 999\,222^2 - 1 = a - 1, \end{aligned}$$

tai $a = b + 1$.

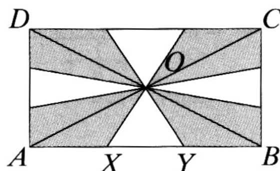
10. **C**. Sakykime, kad gatvės išsidėsčiusios kaip paveikslėlyje.



Į aikštę galima įvažiuoti 6 gatvėmis. O štai sugrįžti visada galima tik 4 būdais — nesvarbu, kuria gatve atvažiavome. Vadinasi, yra $6 \cdot 4 = 24$ būdai.

11. **C**. Lygtis $x(x + y) = 0$ reiškia, kad $x = 0$ arba $x + y = 0$. Vadinasi, lygtį atitinka dvi tiesės $x = 0$ ir $y = -x$.

12. **B**. Pažymėkime stačiakampio kraštines a ir b ir išveskime stačiakampio įstrižaines. Aišku, kad kiekvieno iš gautų 12 trikampių plotas lygus $\frac{1}{12}ab$. Kadangi neužtušuoti 4 trikampiai, o užtušuoti 8 trikampiai, tai plotų santykis yra 4 : 8, arba 1 : 2.

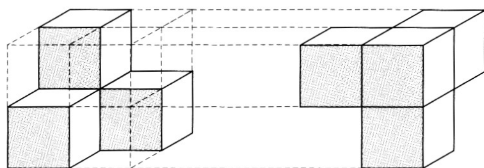


13. **D**. Kadangi $\frac{n+11}{n+7} = 1 + \frac{4}{n+7}$, tai pradinis skaičius bus sveikas, kai $n + 7$ bus skaičiaus 4 daliklis, t. y. $n + 7 = \pm 1, \pm 2, \pm 4$. Taigi $n + 7$, o kartu ir n įgyja 6 reikšmes.

14. **D**. Sąlyga reiškia tik tiek, kad ne kiekvienas Marso gyventojas turi dvi galvas. Sakykime, pavyzdžiui, kad Marse yra ir dvigalvių, ir trigalvių būtybių, bet nėra viengalvių. Tada teiginys **A** neteisingas, teiginys **B** neteisingas, teiginys **C** neteisingas. Neteisingas ir teiginys **E** — pavyzdžiui, tada, jei Marse yra tik vienagalvių ir dvigalvių. Lieka teiginys **D**. Beje, jis reiškia lygiai tą patį, ką ir sąlyga: yra būtybė, kuri turi ne dvi galvas.

15. **C**. Iš nelygybės $a^4 < a^2$ išplaukia, kad $0 < a^2 < 1$, taigi $0 < |a| < 1$. Bet tada nelygybei $a < a^2$ teigiami a netinka, o $-1 < a < 0$ tinka.
Grįžkime prie nelygybės $a < x < a^4 < y < a^2$. Dabar aišku, kad garantuotai $-1 < x < 1$, $0 < y < 1$. Iš nurodytų porų jas tenkina tik $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Šiai porai iš tikrųjų egzistuoja skaičius a, tenkinantis sąlygos nelygybes, pavyzdžiui, $a = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

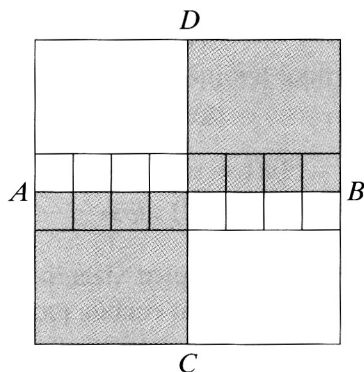
16. A. Paveikslėlyje pavaizduota, kaip iš dviejų detalių galima sudėti kubą $2\times2\times2$:



Iš tų kubų lengva sudėti kubus $4\times4\times4$, $6\times6\times6$, $8\times8\times8$. Įsitikinkime, kad kubo $9\times9\times9$ sudėti negalima. Iš tikrųjų, to kubo tūris lygus 9^3, o duotosios detalės tūris lygus 4. Jeigu iš k detalių sudėtume kubą, tai būtų teisinga lygybė $4\cdot k = 9^3$. Bet tai neįmanoma, nes kairė pusė yra lyginė, o dešinė — nelyginė.

17. D. Pasižymėkime trūkstamus sekos narius a, b, c. Tada $b = 2a$, $c = ab$, $500 = bc$. Iš čia $c = 2a^2$ ir $500 = 4a^3$. Vadinasi, $a = 5$, $b = 10$, $c = 50$. Taigi $abc = 2500$.

18. C. Norimuose kvadratuose turi būti vienodai baltų ir juodų kvadratėlių, taigi jie gali būti tiktai 2×2, 4×4, 6×6, 8×8.

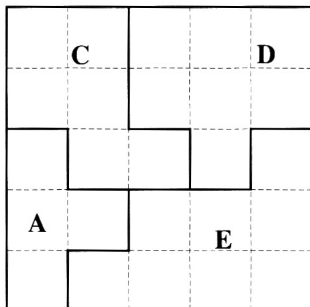


Tokio kvadrato viena simetrijos ašis turi sutapti su kvadrato 8×8 ašimi, t. y. su tiese AB arba CD. Prie tiesės AB norimų kvadratų 2×2 yra 7. Taip pat 7 kvadratai 2×2 yra ir prie tiesės CD. Kadangi vienas kvadratas (centrinis) yra tas pats, tai turime 13 kvadratų 2×2. Panašiai suskaičiuojame, kad yra 9 kvadratai 4×4, 5 kvadratai 6×6 ir 1 kvadratas 8×8, sudaryti iš vienodo skaičiaus baltų ir juodų kvadratėlių. Iš viso turime 28 reikiamus kvadratus.

19. B. Užtušuotos srities plotas lygus lygiakraščio trikampio su kraštine 6 plotui minus trys skritulio išpjovos, kurių spindulys 3, o centrinis kampas lygus $60°$. Vadinasi, ieškomas plotas lygus

$$\frac{6^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{1}{6}\pi\cdot 3^2 = 9\Big(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\Big).$$

20. **B**. Duotųjų figūrų plotai lygūs 4, 5, 6, 7 ir 8 (laikome, kad kvadratėlio plotas lygus 1). Jų bendras plotas lygus 30.



Kadangi kvadratą sudarys keturios iš figūrų, tai jo plotas bus ne mažesnis už $30 - 8 = 22$, bet ne didesnis už $30 - 4 = 26$. Kvadrato kraštinė bus sveika, taigi plotas — sveikojo skaičiaus kvadratas. Bet tarp 22 ir 26 yra tik vienas kvadratas, būtent 25. Todėl reikia atmesti figūrą **B**. Paveikslėlyje pavaizduota, kaip iš likusių keturių figūrų galima sudėti kvadratą.

21. **D**. Kiekvienu atveju užtenka suskaičiuoti sudėtinę funkciją $f \circ f$:

A) $f \circ f(x) = 2(2x - 3) - 3 = 4x - 9$

B) $f \circ f(x) = 2\sqrt{2\sqrt{x} - 3} - 3$, kai $x \geqslant \frac{9}{4}$

C) $f \circ f(x) = 4\sqrt{4\sqrt{x} - 3} - 3$, kai $x \geqslant \frac{9}{16}$

D) $f \circ f(x) = -2(-2x + 3) + 3 = 4x - 3$

E) $f \circ f(x) = -4(-4x + 1) + 1 = 16x - 3$.

Vadinasi, sąlygą tenkina funkcija **D**.

22. **C**. Pagal Herono formulę

$$S^2 = \frac{4+a}{2} \cdot \frac{4-a}{2} \cdot \frac{a+2}{2} \cdot \frac{a-2}{2} = \frac{1}{16}\big[(b - a^2)(a^2 - 4)\big] =$$

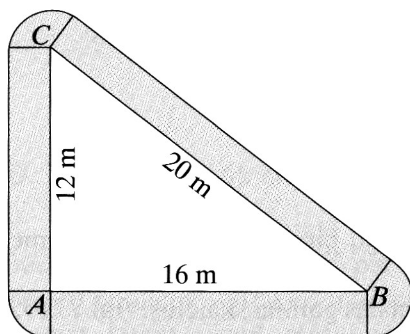
$$= \frac{1}{16}(20a^2 - a^4 - 64) = \frac{1}{16}\big[36 - (10 - a^2)^2\big].$$

Kadangi $a \leqslant 3$, tai, plotas bus didžiausias, kai $a = 3$ (intervale $[0, 3]$ turime didėjančią funkciją), $S^2 = \frac{35}{16}$, tada $S = \frac{\sqrt{35}}{4}$.

Pastaba. Žinoma, sąlygoje reikėjo rašyti $2 < a \leqslant 3$: jeigu $a \leqslant 2$, tai pažeista trikampio nelygybė.

Kas būtų, jei sąlygoje iš viso nevaržytume a? Tada, remiantis trikampio nelygybe, $2 < a < 4$, o $S^2 \leqslant \frac{1}{16} \cdot 36$. Didžiausias plotas $S = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ būtų pasiekiamas, kai $a = \sqrt{10}$.

23. **E**. Žirafa gali nuskabyti žolę plote, kurio kiekvienas taškas nutolęs nuo aptvaro ne daugiau kaip 2 m.



Tą plotą sudaro trys stačiakampiai, nubrėžti ant trikampio ABC kraštinių, ir trys išpjovos skritulių, kurių centrai yra trikampio viršūnės, o spinduliai lygūs 2 m.

Pažymėkime trikampio kampų didumus α, β ir γ. Imkime viršūnę, prie kurios yra didumo α kampas. Išpjovos prie jos kampas lygus

$$360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \alpha) = 180^\circ - \alpha.$$

Panašiai kitų išpjovų kampai lygūs $180^\circ - \beta$ ir $180^\circ - \gamma$. Todėl tų centrinių kampų suma lygi

$$180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma =$$
$$= 3 \cdot 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Vadinasi, trijų išpjovų suma duoda visą skritulį. Todėl žirafos nuskabomą plotą sudaro trys stačiakampiai ir skritulys. Jis lygus

$$12 \cdot 2 + 16 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + \pi \cdot 2^2 = 96 + 4\pi \approx 108{,}56\,(\text{m}^2).$$

24. **E**. Kadangi m — lyginis skaičius, tai $m + 1$ — nelyginis. Todėl jeigu n — nelyginis, tai skaičius $(m + 1)^2 + n(m + 1)$ — lyginis, o jeigu n lyginis, tai $(m + 1)^2 + n(m + 1)$ — nelyginis.

25. **D**. Laikykime atkarpos AB ilgį lygiu 1. Kiekvieną atkarpos AB tašką vienareikšmiškai nustato jo atstumas iki taško A. Taigi kalbėdami apie atkarpos AB taškus, galime kalbėti apie intervalo (0; 1) skaičius, o aprašytoji konstrukcija leidžia mums gauti pavidalo $\frac{k}{2^n}$ skaičius, kur n — bet kuris natūralusis skaičius, o k įgyja reikšmes 1, 2, 3, ..., $2^n - 1$. Tašką, dalijantį atkarpą AB santykiu 5 : 11, atitinka skaičius $\frac{5}{16}$. Jam gauti reikia keturių žingsnių: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{16}$.

26. **A**. Iš sąlygos $|x - y| = |y - z| = |z - t| = 1$ išplaukia, kad skaičiai $x - y$, $y - z$, $z - t$ yra sveikieji nelyginiai. Todėl ir $x - t = (x - y) + (y - z) + (z - t)$ kaip trijų nelyginių suma bus nelyginis skaičius. Vadinasi, jis nelygus nuliui. Beje, nesunku parinkti reikšmes x, y, z, kad būtų $x - t = \pm 1, \pm 3$:
B) $x - t = -3$, kai $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$, $t = 3$;
C) $x - t = 3$, kai $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$, $t = 0$;
D) $x - t = -1$, kai $x = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $t = 1$;
E) $x - t = 1$, kai $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$, $t = 0$.

27. **B**. Išrašę į eilutę greta vienas kito 10 pirmųjų pirminių skaičių, gauname
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29.
Išbraukiame 8 skaitmenis, kad liktų didžiausias galima skaičius. Tai 77192329. Jo penktas skaitmuo iš kairės yra 2.

28. **B**. Pažymėkime $f(x) = |||x|-1|-a|$. Matome, kad $f(x) = f(-x)$. Todėl jei x_0 yra lygties $f(x) = 4$ sprendinys, tai ir $-x_0$ yra tos lygties sprendinys. Kadangi lygtis turi turėti 5 sprendinius, tai vienas jos sprendinys turi būti 0. Todėl

$$\Big||0|-1|-a\Big| = 4, \qquad |1 - a| = 4,$$

ir $a = 5$ arba $a = -3$. Patikrinkime, kas iš jų tenkina uždavinio sąlygą.
Kai $a = -3$, tai turime lygtį $|||x|-1| + 3| = 4$, iš čia $||x|-1| + 3 = 4$ (nes $||x|-1|$ yra neneigiamas skaičius). Tada $||x|-1| = 1$, $|x|-1 = \pm 1$, $|x| = 2$ arba $x = 0$. Taigi pradinė lygtis, kai $a = -3$, turi 3 sprendinius.
Kai $a = 5$, pradinė lygtis virsta $|||x|-1|-5| = 4$, $||x|-1|-5 = \pm 4$, $||x|-1| = 9$ arba $||x|-1| = 1$. Pirma lygtis duoda $|x| - 1 = \pm 9$, $|x| = 10$, $x = \pm 10$. Antra lygtis tampa $|x|-1 = \pm 1$, $|x| = 2$, arba $|x| = 0$, ir turime 5 sprendinius.

29. **C**. Nelygybė $x(x - 100) < 1997$ ekvivalenti nelygybei $(x - 50)^2 < 4497$, t. y.

$$50 - \sqrt{4497} < x < 50 + \sqrt{4497}.$$

Bet $67 < \sqrt{4497} < 68$, todėl $-17 \leqslant x \leqslant 117$. Šią nelygybę tenkina 135 sveikieji skaičiai.

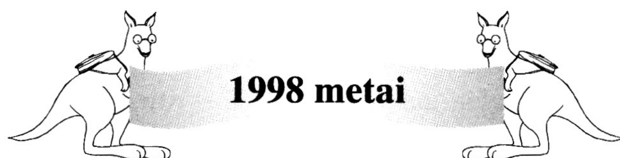
30. **C**. Bet kurio daugianario koeficientų suma lygi reikšmei taške $x = 1$: jei

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

tai

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0.$$

Mūsų atveju $P(1) = 1997$, taigi tokia ir koeficientų suma.



1. **D**. Matome, kad tik atveju **D** mazgas užsiverš.

2. **C**. Per 1 valandą minutinė rodyklė nueina 360° centrinį kampą, valandinė — $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Vadinasi, per 1 valandą minutinė rodyklė „pabėga“ 330°, o per 20 minučių — triskart mažiau, 110°. Lygiai 9 valandą rodyklės sudaro 90° kampą, kitaip sakant, minutinė rodyklė pabėgusi nuo valandinės 90° kampu. Po 20 minučių, kai bus 9^{20} val. ji bus pabėgusi $90^\circ + 110^\circ = 200^\circ$ kampu. Bet mes kalbėdami apie dviejų spindulių sudaromą kampą imame mažesnį iš dviejų kampų, papildančių vienas kitą iki 360° (t. y. ne didesnį už 180°). Vadinasi, rodyklės 9^{20} val. sudaro $360^\circ - 200^\circ = 160^\circ$ kampą.

3. **C**. Pirmame tirpale yra 200 g druskos, antrame — 450 g druskos. Vadinasi, 5ℓ mišinyje bus 650 g druskos, o tai sudaro $\frac{0{,}65}{5} \cdot 100 = 13\%$.

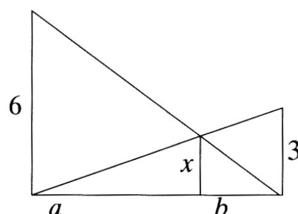
4. **D**. Kadangi DBD$(x; y) = 5$, tai egzistuoja tokie skaičiai, kad $x = 5m$, $y = 5n$, o m ir n neturi bendrų daliklių. Kadangi $5m + 5n = 60$, tai $m + n = 12$. Ši lygtis turi sprendinius $(1; 11)$, $(2; 10)$, $(3; 9)$, $(4; 8)$, $(5; 7)$, $(6; 6)$, $(7; 5)$, $(8; 4)$, $(9; 3)$, $(10; 2)$, $(11; 1)$, bet komponentės neturi bendrų daliklių tik keturiuose iš jų: $(1; 11)$, $(5; 7)$, $(7; 5)$, $(11; 1)$.

5. **D**. Kadangi remiantis 1 punktu $x > 3$, tai $3 - x < 0$. Klaida padaryta pereinant nuo ketvirto punkto prie penkto: dalijant iš neigiamo skaičiaus, reikia keisti nelygybės ženklą.

6. **C**. Žymėkime kaip paveikslėlyje. Iš trikampių panašumo

$$\frac{x}{6} = \frac{b}{a+b}, \quad \text{o} \quad \frac{x}{3} = \frac{a}{a+b}.$$

Todėl sudėję turime $\frac{x}{6} + \frac{x}{3} = 1$, iš čia $x = 2$.



7. **B**. Mums truputį patogiau nagrinėti skaičius nuo 0 iki 999 — jie turės tiek pat ketvertų. Užrašant pirmą dešimtį skaičių nuo 0 iki 9 prireiks 1 ketvertuko. Lygiai taip pat 1 ketvertuko prireiks visose likusiose dešimtyse, išskyrus dešimtį nuo 40 iki 49 — čia reikia 11 ketvertukų. Vadinasi, pirmam šimtui reikia $9 \cdot 1 + 11 = 20$ ketvertukų.

Tiek pat ketvertukų reikia ir kiekvienam kitam šimtui, išskyrus šimtą nuo 400 iki 499 — čia jų reikės po papildomą ketvertuką kiekvienam skaičiui, taigi $100 + 20 = 120$ ketvertukų. Vadinasi, iš viso reikės $9 \cdot 20 + 120 = 300$ ketvertukų.

8. **B**. Nesunku pasidaryti brėžinį. Matome, kad bendroji dalis — penkiakampis. Dar paprasčiau sulenkti popieriaus lapą — žiūrint prieš šviesą dviguboji dalis gerai išsiskiria.

9. **B**. Visi tos sumos dėmenys, pradedant penktuoju, turi vienetų skaitmenį 0. Kadangi $1 + 2 + 6 + 24 = 33$, tai suma baigsis trejetu.

10. **C**. Užtušuotos srities plotą randame iš stačiakampio ploto atėmę dviejų skritulių, kurių spinduliai 1 ir 2 vienetai, plotus. Vadinasi, užtušuotas plotas lygus $24 - 5\pi$, ir jis sudaro $\frac{24-5\pi}{24} \cdot 100\% = \left(100 - \frac{125}{6}\pi\right)\%$ stačiakampio ploto.

11. **E**. Aišku, kad **A** neteisinga teigiamiems a (tada b neigiamas). **B** neteisinga teigiamiems b. Likusias lygybes galima kelti kvadratu ir gauti ekvivalenčias pradinėms:
C $4ab = 0$ **D** $ab = |ab|$ **E** $ab = -|ab|$.
Kadangi $ab < 0$, tai teisinga tik **E**.

12. **C**. Iš sąlygos aišku, kad tie surinktų grybų septyni skaičiai, išrikiuoti didėjimo tvarka, sudaro aritmetinę progresiją, kurios skirtumas 1. Pažymėję vidurinį jų x, turime $x-3+x-2+x-1+x+x+1+x+2+x+3 = 707$, $7x = 707$, $x = 101$. Vadinasi, didžiausias iš jų yra $x + 3 = 104$.

13. **D**. Imkime du taškus ir veskime per juos tiesę, o per trečią tašką veskime jai lygiagrečią. Aišku, kad joms lygiagreti ir nuo jų vienodai nutolusi tiesė yra ieškomoji. Kadangi galima fiksuoti 3 taškų poras, tai yra 3 ieškomos tiesės. Žinoma, kalbant apie trikampio viršūnes tai būtų 3 trikampio vidurio linijos.

14. **B**. Žr. 1996 metų Junioro 25 uždavinio sprendimą.

15. **D**. Kadangi balsių žodyje KANGOUROU yra 5, o priebalsių 4, tai balsės užims 1, 3, 5, 7, 9 vietas, o priebalsės — likusias 4 vietas. Sustatyti priebalses paprasta: pirmai yra 4 vietos, antrai 3 vietos, trečiai 2 vietos, ketvirtai — kas liko, iš viso $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ būdai. Sustatykime balses. Pradėkime nuo abiejų O — joms dvi vietas galima paskirti 10 būdų (13), (15), (17), (19), (35), (37), (39), (57), (59), (79). Raidei A galima skirti bet kurią iš likusių 3 vietų, raidėms U liks kas liko — taigi priebalses galima išrikiuoti $10 \cdot 3 = 30$ būdų. Vadinasi, iš viso galima sudaryti $24 \cdot 30 = 720$ žodžių.

16. **A**. Iš A į C taškas turi padaryti 4 žingsnius — 3 į dešinę ir vieną žemyn. Žingsnį žemyn jis gali padaryti pirmą, antrą, trečią, ketvirtą — iš viso 4 būdai. Iš C į B jis gali patekti 3 būdais, taigi kelių iš A į B per C yra $4 \cdot 3 = 12$. Suskaičiuokime, kiek yra bet kokių kelių iš A į B. Taškas turi padaryti 7 ėjimus, iš jų 3 ėjimus žemyn jis gali padaryti $C_7^3 = 35$ būdais (nors ir nuobodu, bet galima išrašyti žingsnius numeriais, kai einama žemyn — 123, 124, ..., 567). Likusieji žingsniai bus į dešinę, taigi kelių iš viso yra 35, o ieškomasis santykis lygus $\frac{12}{35}$.

17. **C**. Iškilasis n-kampis turi $\frac{n(n-3)}{2}$ įstrižainių. Lengva įsitikinti, kad lygtis $\frac{n(n-3)}{2} = 28$, arba $n(n-3) = 56$, sprendinių neturi: kai $n \leqslant 9$, tai $n(n-3) \leqslant 54$, o kai $n \geqslant 10$, tai $n(n-3) \geqslant 70$. Toliau, nelygybę $\frac{n(n-3)}{2} > 100$ tenkina $n = 16$. Vadinasi, teiginiai **D** ir **E** neteisingi. Neteisingas teiginys **A** — imkime šešiakampį — jis turi $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ įstrižaines. Neteisingas ir teiginys **B** — užtenka imti keturkampį ar penkiakampį. Lieka patikrinti teiginį **C** — jis teisingas: $\frac{n(n-3)}{2} = 35$, $n(n-3) = 70$, taigi 10-kampis turi 35 įstrižaines.

18. **C**. Iš sąlygos matome, kad skaičius x nelyginis. Kadangi $x + y$ lyginis, tai nelyginis ir skaičius y. Vadinasi, jis baigiasi 5, o tada ir xy baigiasi 5.

19. **C**. Remiantis apibrėžimu, $2 * 3 = \max\{4, 5\} = 5$, $3 * 2 = \max\{6, 5\} = 6$. Todėl $(2 * 3) * (3 * 2) = 5 * 6 = \max\{10, 11\} = 11$.

20. **D**. Remiantis sąlyga,

$$a + b + 10a + b + 100a + b = c + d + 10c + d + 100c + d,$$
$$37(a - c) = d - b.$$

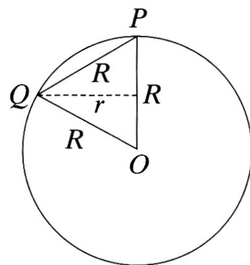
Turime $a \neq c$, nes priešingu atveju būtų ir $b = d$, taigi daugianariai sutaptų. Todėl lygtis $f(x) = g(x)$ ekvivalenti lygčiai $(a - c)x = d - b$, o ši turi vienintelį sprendinį. Kadangi su $x = 37$ ši lygybė teisinga, tai $x = 37$ yra tas vienintelis sprendinys.

21. **A**. Remdamiesi apibrėžimu, apskaičiuokime keletą pirmųjų sekos narių:

$$a_0 = 4, a_1 = 6, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{1}{6}, a_5 = \frac{4}{6}, a_6 = 4, a_7 = 6, \ldots$$

Matome, kad seka (a_n) yra periodinė, kurios periodas lygus 6. Kadangi $1998 = 6 \cdot 333$, tai $a_{1998} = a_0 = 4$.

22. **C**. Kirskime rutulį plokštuma, einančia per sferos taškus P ir Q (skritulio kojelės) ir rutulio centrą O. Iš sąlygos išplaukia, kad trikampis PQO yra lygiakraštis, o lygiagretės spindulys r yra to trikampio aukštinė. Vadinasi, $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, taigi lygiagretės ilgis $C = 2\pi r = \pi R\sqrt{3}$.



23. **E**. Užrašyti pirmuosius 10 ėjimų nesunku net ir nenusibraižius koordinačių sistemos:

$$(0; 0) \to (1; 0) \to (1; 2) \to (-2; 2) \to (-2; -2) \to (3; -2) \to$$
$$(3; 4) \to (-4; 4) \to (-4; -4) \to (5; -4) \to (5; 6).$$

24. A. Uždavinys visai paprastas, jeigu remsimės lengvai įrodomu teiginiu, kad stačiajame trikampyje

$$a + b = 2R + 2r,$$

kur a ir b — statiniai, r — įbrėžtinio apskritimo spindulys, R — apibrėžtinio apskritimo spindulys. Kadangi įžambinė $c = 2R$, tai

$$P = a + b + c = 4R + 2r.$$

Mūsų atveju $P = 4 \cdot 6{,}5 + 2 \cdot 2 = 30$.

25. D. Remiantis sąlyga,

$$n + 27 = k^2, \quad n - 62 = p^2, \quad k, p \in \boldsymbol{N}.$$

Todėl

$$k^2 - p^2 = 89, \quad (k + p)(k - p) = 89.$$

Kadangi 89 — pirminis skaičius, tai $k + p = 89$, $k - p = 1$. Vadinasi, $k = 45$, $p = 44$, o $n = k^2 - 27 = 2025 - 27 = 1998$.

26. C. Matome, kad t^2 galima pakeisti į $t + 1$ ir pažeminti t laipsnius:

$$t^4 = (t + 1)^2 = t^2 + 2t + 1 = 3t + 2,$$
$$t^5 = 3t^2 + 2t = 3(t + 1) + 2t = 5t + 3.$$

27. C. Aišku, kad palikti 12 stiklainių per mažai: gali atsitikti, kad tai bus 8 braškių, 2 aviečių ir 2 gervuogių stiklainiai. O štai palikus 13 stiklainių, uždavinio sąlyga bus išpildyta. Iš tikrųjų, kurios nors vienos uogienės bus bent 5 stiklainiai. Kadangi tos uogienės tarp likusių stiklainių tikrai ne daugiau kaip 3, tai bent $13 - 5 - 3 = 5$ stiklainiai yra kitų uogienių. Bet tarp 5 stiklainių dviejų rūšių uogienės tikrai yra bent 3 vienodi. Vadinasi, reikia palikti ne mažiau kaip 13 stiklainių, o tai reiškia, kad paimti galima ne daugiau kaip 7 stiklainius.

28. B. Imkime $P = 1$, $Q = 0$. Tada

$$A = 1101, \quad B = 10101, \quad C = 101100, \quad D = 11001, \quad E = 111000.$$

Bet 1101, 1011, 11001, 111 iš 7 nesidalija (patikrinkite), vadinasi, tai turėtų būti skaičius **B** (10101 iš 7 dalijasi). Iš tikrųjų,

$$B = \overline{QPQPQP} = \overline{QP} \cdot 1000 + \overline{QP} = 10101 \cdot \overline{QP},$$

todėl dalijasi iš 7 su bet kuriais skaitmenimis Q ir P.

29. **D**. Po pirmo rato bus išbraukti skaičiai 1, 3, 5, ..., 1997. Taigi liks lyginiai skaičiai, kurių yra 999, paskutinis — 1998. Antrame rate išbrauksime 2, 6, ..., t. y. skaičius, esančius nelyginėse vietose, taigi ištrauksime 500 skaičių. Liks 499 skaičiai, skirtumas tarp gretimų dviejų likusių skaičių bus 4, paskutinis skaičius išbrauktas, naujas paskutinis skaičius yra 1996. Trečiu ratu išbrauksime 249 skaičius lyginėse vietose, ir liks 250 skaičių, kurių skirtumai yra 8, o paskutinis — 1996. Po ketvirto rato liks 125 skaičiai, skirtumas 16, paskutinis skaičius 1996. Po penkto rato lieka 62 skaičiai, skirtumas 32, paskutinis skaičius 1980 (1996 – 16, nes paskutinis skaičius penktame rate išbraukiamas). Po šešto rato liks 31 skaičius, skirtumas 64, paskutinis skaičius 1948 (vėl paskutinis skaičius buvo išbrauktas). Po septinto rato lieka 16 skaičių, skirtumas 128, paskutinis skaičius 1948. Kadangi paskutinis skaičius nebuvo išbrauktas ir $16 = 2^4$, tai toliau kiekviename rate bus išbraukiami skaičiai nelyginėse vietose. Todėl skaičius 1948, stovintis tuose ratuose atitinkamai vietose, kurių numeriai 16, 8, 4, 2, išbrauktas nebus.
Apie šį, vadinamąjį Flavijaus, uždavinį, galima pasiskaityti TEV leidyklos išleistoje knygelėje „Matematinės miniatiūros“ (29, 65 psl.).

30. **C**. Trikampiai AOB ir OBC lygiašoniai, todėl $\angle BOC = \beta$ ir $\angle OAB = \angle OBA = 2\beta$ ($\angle OBA$ — trikampio OBC priekampis). Bet α yra trikampio OAC priekampis, todėl $\alpha = \beta + \angle OAB = \beta + 2\beta = 3\beta$.

